势函数解决附不等式约束平差问题的研究

欧阳文森[1,3]，欧为林[2]，朱建军[3]

（1. 长沙县国土资源局，长沙 410100；
2. 湖南省第一测绘院，湖南衡阳 421001；
3. 中南大学信息物理工程学院，长沙 410083）

摘要：测量数据处理中通常会有先验信息可以利用，这些先验信息可以总结成等式或不等式。附等式约束的平差理论目前已经十分成熟，因此如果是等式约束，则可用附等式约束的间接平差方法来处理。但如果是不等式约束，由于附不等式约束的平差问题在直接求解时存在困难，FRISCH(1955) 和 CARROLL(1961) 提出了将不等式约束转化为无约束的罚函数算法，并在求解优化问题上取得了非常好的效果。然而这种经典的罚函数随着惩罚因子的增大，其 Hessian 矩阵会出现病态，收敛速度会变得很慢。本文试图运用罚函数的思路，尝试引入一种势函数算法并结合最小二乘平差模型来解决附不等式约束的平差问题；文中通过分析基于最优性条件（K-T 条件）下该势函数具有的四个性质和拉格朗日函数法来推导平差结果及其统计特征的显式表达式，通过编程可知算法过程简单、易推广，数值算例的结果也证明了该算法具有可行性。

关键词：大地测量；线性不等式约束；势函数；最小二乘平差；显式表达式

中图分类号：P207　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1674-2850(2008)07-0622-6

Solving the LICA problem by a potential function method

OUYANG Wensen[1,3], OU Weilin[2], ZHU Jianjun[3]

(1. *The Bueau of Land and Resources Changsha Town*, *Changsha* 410100;
2. *The First Surveying and Mapping Institute of Hunan Province*, *Hengyang*, *Hunan* 421001;
3. *Info-physics Geomatics Engineering College*, *Central South University*, *Changsha* 410083)

Abstract: In survey data processing, sometimes there is prior information that can be used. This prior information can be expressed by equality or inequality constraints on the parameters. The equality-constrained adjustment theory has been maturated and comprehended, so if the constraints are equality the problem can be solved by the equality-constrained indirect adjustment theory. However, if the constraints are linear inequality, the problem becomes linear inequality constrained adjustment (LICA) and the computation will be very difficult. FRISCH(1955) and CARROLL(1961) proposed that penalty function which transformed constrained-unequation into unstrained function obtain good result, but the Hessian matrix will be sick and the convergence speed will be slow with the penalty factorial's accretion. So the paper tries to adopt the thought of penalty and combines one new potential function (PF) method and least-square method to solve the LICA problem. It analyses the PF's four characteristics based on the K-T principle and Lagrange function method and then educates the explicit expression of adjustment result and thus the statistical properties can be easily determined. A numerical example is given to show the interesting method.

Key words: geodetic survey; LICA; potential function; least-square adjustment; explicit expression

0 引言

将有效的先验信息转换为不等式约束参与测量平差，可较好地改善平差结果，提高平差精度[1~3]。

基金项目：国家自然科学基金（40574003）；高等学校博士学科点专项科研基金（20050533057）
作者简介：欧阳文森（1981－），男，硕士研究生，主要研究方向：测量数据处理、国土资源信息化
通信联系人：朱建军，教授，博士生导师，主要研究方向：GPS 测量数据处理. E-mail: zjj@mail. csu. edu. cn

但与其它平差方法相比，附不等式约束条件的平差计算非常困难，目前还没有在工程实践中得到广泛应用。因此研究附不等式约束的平差算法，将附不等式约束的平差理论运用到工程实践中，对测量平差理论和方法的发展具有重要的现实意义[4~8]。

解决附不等式约束条件的平差问题关键是如何处理约束条件，一般将不等式约束条件转化为等式约束或无约束，传统的方法主要通过约束变尺度（SQP）方法（HAN and POWELL）和 Lagrange 乘子法（POWELL and HESTENES）实现[9]。随着工程精度需求的提高，人们对平差结果的精度分析越发看重，而这些传统方法很难直接进行约束转换并最终得到平差结果的显式表达式。近年来最具代表性的是椭球约束算法[8]、Bayesians 估计算法[1]以及在对数罚函数和倒数罚函数算法的基础上进行改进的新的罚函数算法[9]，这些方法虽然克服了上述缺点，但是受到观测数据大和先验信息逐渐丰富的困扰，很难将约束条件转化为椭球约束和 Bayesians 条件式，因此在附约束不等式的平差实践中很难得到推广。

本文运用罚函数的思路，采用一种新的势函数算法，将不等式约束平差转换为无约束平差，其策略就是根据不等式约束的特点构造某种“惩罚”项，运用最小二乘平差模型构造目标函数，将约束条件整体加到目标函数中去，迫使新目标函数的平差结果收敛到原来的目标函数。该势函数结合增广拉格朗日函数只需要取足够大的惩罚因子即可，不需趋向于无穷大，因此克服了 Hessian 矩阵的病态问题。

本文首先介绍附不等式约束的平差理论模型，进而通过等价转换构造一种新的势函数，由非线性规划理论的最优性条件（K-T 条件）分析该势函数的性质，根据最小二乘平差理论推导平差结果的显式表达式及精度评定，最后介绍算法流程以及对比不同算法对同一算例所得到的结果，说明本文这种势函数方法可行且易推广。

1 不等式约束的最小二乘平差模型

考虑到以下一般的观测模型

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{e} \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{Gx}-\boldsymbol{w}\leqslant 0\ (\text{或者 } a_1\leqslant \boldsymbol{Gx}\leqslant a_2) \tag{1b}$$

其中，方程（1a）是误差方程，方程（1b）是不等式约束代表的先验信息。$\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times t$ 的设计矩阵，$\boldsymbol{x}$ 是 $t\times 1$ 的未知向量，$\boldsymbol{e}$ 是随机误差向量，均值为 0，协方差分量为 $\sigma^2\boldsymbol{Q}_e$，$\boldsymbol{Q}_e=\boldsymbol{P}^{-1}$ 是协因数阵，$\boldsymbol{P}$ 是权阵；$\boldsymbol{G}$ 是一个 $m\times t$ 的系数矩阵，$\boldsymbol{w}$ 是 m 维的约束向量。

根据最小二乘平差原则，将式（1）转化为

$$\min:\Phi(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{y}) \tag{2a}$$

$$\text{s. t. }:\boldsymbol{Gx}-\boldsymbol{w}\leqslant 0 \tag{2b}$$

不考虑约束条件，根据最小二乘原理，其解为 $\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Py}$，且知 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{N}[\boldsymbol{x}=E(\hat{\boldsymbol{x}}),\ \sigma^2\boldsymbol{Q}_{\hat{x}}]$。其中，$\boldsymbol{N}^{-1}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{PA}$，$\boldsymbol{Q}_{\hat{x}}=\boldsymbol{N}^{-1}$ 是协因数矩阵。为了平差计算的需要，一般将式（2a）等价转化为另外一种形式[1]

$$\min:\Phi(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{Q}_{\hat{x}}^{-1}(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{3a}$$

$$\text{s. t. }:\boldsymbol{Gx}-\boldsymbol{w}\leqslant 0 \tag{3b}$$

为了计算和表示的方便，将平差模型（3）进行投影，即令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}$，因此得到一个等价的表达式

$$\min:\Phi(\boldsymbol{X}+\hat{\boldsymbol{x}})=f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Q}_{X}^{-1}\boldsymbol{X} \tag{4a}$$

$$\text{s. t. }:\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}+\hat{\boldsymbol{x}})\leqslant \boldsymbol{w}$$

$$\text{即 } \boldsymbol{GX}\leqslant\boldsymbol{W}=\boldsymbol{w}-\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{4b}$$

最终要计算和推导的模型如下

$$\min: f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_X^{-1}\boldsymbol{X} \tag{5a}$$

$$\boldsymbol{GX} \leqslant \boldsymbol{W} \tag{5b}$$

为了方便后文表示，定义约束条件为：$\boldsymbol{X} \in \Omega = \{\boldsymbol{X} \mid g_i = \boldsymbol{G}_i\boldsymbol{X} - \boldsymbol{W}_i \leqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,m\}$

平差模型（5）很明显在数学规划领域是一个二次优化问题，如引言所述，传统算法存在一定的缺点。所以针对该模型，本文根据最优性条件（K-T 条件）和最大熵原则，结合一种新的势函数和增广拉格朗日函数，来求解模型（5），克服了内点算法（罚函数算法是其中的一种）的缺点并给出平差结果的显式表达式。

2 基于势函数转化模型及平差结果的显式表达式

根据上述讨论，本文采用势函数将式（5b）转化为

$$g_p(\boldsymbol{X}) = p\sum_{i=1}^{m}[1-(\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{X}-\boldsymbol{W}_i)]^{-\frac{1}{p}} - 1 \tag{6}$$

进而利用增广拉格朗日函数最终将模型（5）转化为无约束平差问题

$$F(\boldsymbol{X},u,p,\sigma) = f(\boldsymbol{X}) + \sum_{i=1}^{m}u_i g_p(\boldsymbol{X}) + \frac{\sigma}{2}\sum_{i=1}^{m}g_p^2(\boldsymbol{X}),\ \boldsymbol{X} \in \mathrm{int}S \tag{7}$$

其中，$S = \{\boldsymbol{X} \mid 1-g_i(\boldsymbol{X}) \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n\}$，$u \geqslant 0$，且 $p \neq 0$ 为控制参数。根据 K-T 条件，基于该势函数的增广拉格朗日函数式（7）可以得出以下的性质[10]。

性质 1 $p \neq 0$，定义 $\boldsymbol{X} \in \overline{\Omega} = \{\boldsymbol{X} \in S \mid p[1-(\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{X}-\boldsymbol{W}_i)]^{-\frac{1}{p}} - 1\} \leqslant 0, i = 1,2,\cdots,m\}$，则

$$\min: \{f(\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{X} \in \overline{\Omega}\} \Leftrightarrow \min: \{\Phi(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \Omega)\}$$

显然，$F(\boldsymbol{X},u,p,\sigma)$ 是 $\min:\ \{f(\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{X} \in \overline{\Omega})\}$ 的增广拉格朗日函数。

性质 2 $\lim\limits_{p\to 0}F(\boldsymbol{X},u,p,\sigma) = f(\boldsymbol{X}) + \delta[X \mid \Omega(u)]$，其中 $\delta[\cdot \mid \Omega(u)]$ 是 $\Omega(u)$ 的指示函数。

该性质表明极限 $\lim\limits_{p\to 0}F(\boldsymbol{X},\ u,\ p,\ \sigma)$ 是 $\min: \{\Phi(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \Omega)\}$ 的障碍函数。若 $u > 0$，根据 K-T 条件，当 $|p|$ 充分小时，$F(\boldsymbol{X},u,p,\sigma)$ 是 $\min: \{\Phi(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \Omega)\}$ 的近似障碍函数。

性质 3 对于 $p \neq 0$，$\nabla F(X^*, U^*, p, \sigma) = 0$。其中$(X^*, U^*)$是式（7）的 Kuhn-Tucker 对，即

$$\nabla_u F(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{U}^*, p, \sigma) = g_p(\boldsymbol{X}^*) = 0$$

$$\nabla_X F(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{U}^*, p, \sigma) = \nabla f(\boldsymbol{X}^*) + \sum_{i=1}^{m}u_i^*[1-g_i(\boldsymbol{X}^*)]^{-\frac{p+1}{p}}\boldsymbol{G}(i) + 2g_p(\boldsymbol{X}^*)\sum_{i=1}^{m}u_i^*[1-g_i(\boldsymbol{X}^*)]^{-\frac{p+1}{p}}\boldsymbol{G}(i)$$

$$= 2(\boldsymbol{X}^*)^T\boldsymbol{Q}_X^{-1} + \sum_{i=1}^{m}u_i^*[1-g_i(\boldsymbol{X}^*)]^{-\frac{p+1}{p}}\boldsymbol{G}(i) = 0$$

性质 4 存在常数 $\hat{p} > 0$，使得对任意 $|p| \in (0,\hat{p})$，$\nabla_X^2 F(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{U}^*, p, \sigma)$ 是严格正定的。

以上 4 个性质均是以 K-T 条件成立为前提得到的，该势函数将模型（5）转化为无约束平差，因此式（5）最终等价于式（7），即两模型同解。同时针对模型（5），贺素香教授通过大量的数学论证证明该模型具有收敛性[10]。显然，最终的平差结果 X^* 和控制参数 U^* 可以从上述性质 3 推导出。

$$\nabla_u F(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{U}^*, p, \sigma) = g_p(\boldsymbol{X}^*) = 0 \tag{8}$$

$$\nabla_X F(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{U}^*, p, \sigma) = \nabla f(\boldsymbol{X}^*) + \sum_{i=1}^{m}u_i^*[1-g_i(\boldsymbol{X}^*)]^{-\frac{p+1}{p}}\boldsymbol{G}(i) + 2g_p(\boldsymbol{X}^*)\sum_{i=1}^{m}u_i^*[1-g_i(\boldsymbol{X}^*)]^{-\frac{p+1}{p}}\boldsymbol{G}(i) \tag{9}$$

令

$$z^T = \frac{\partial g_p(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}}|_{X=X^*} = [1-g(\boldsymbol{X}^*)]^{-\frac{p+1}{p}}\boldsymbol{G} = 2\boldsymbol{C}^T \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{C}$ 是 $n\times m$ 的矩阵。

将式（8）、式（10）代入式（9）得

$$\nabla_X F(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{U}^*, p, \sigma) = 2\boldsymbol{Q}_X^{-1}\boldsymbol{X}^* + 2\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{U}^* \tag{11}$$

因此得到

$$\boldsymbol{Q}_X^{-1}\boldsymbol{X}^* + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{U}^* = 0 \tag{12}$$

$\boldsymbol{Q}_X^{-1}$ 正定，由式（12）得 $X^* = -\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{U}^*$ (13)

将式（8）$g_p(\boldsymbol{X}^*)$ 在 X 处用 Taylor 公式展开并忽略高次项，可得式（14）

$$g_p(\boldsymbol{X}^*) = g_p(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^*) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^*) \approx 0 \tag{14}$$

将式（13）得到的结果代入式（14），可求得式（7）Kuhn-Tucker 对（$\boldsymbol{X}^*$，$\boldsymbol{U}^*$），

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^*) = \boldsymbol{C}(X+\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^TU^*) = 0$$

$$\boldsymbol{U}^* = -[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X} \tag{16}$$

由前述转换 $X = x - \hat{x}$ 可得模型（2）、模型（3）的平差结果显式表达式为

$$\boldsymbol{x}^* = \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}) = \{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}\}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{17}$$

由于在展开 Taylor 式时存在一个较小的误差项，因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^* &= \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}) + O(1/n)\\ &= \{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}\}\hat{x} + \boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}x + O(1/n)\end{aligned} \tag{18}$$

可以看出平差结果的数学期望和协因数阵为

$$\begin{aligned}E(\boldsymbol{x}^*) &= \{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}\}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + O(1/n)\\ &= \{1-\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}\}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}} + O(1/n)\\ &= \hat{\boldsymbol{x}} + O(1/n)\end{aligned} \tag{19}$$

即 x^* 是 $\hat{x}$ 的渐近无偏估计。根据方差－协方差传播定律，可得 x^* 渐近方差—协方差矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}^*) &= \{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}\}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + O(1/n)\\ &\approx \boldsymbol{Q}_X^{-1} - \boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X^{-1} < \boldsymbol{Q}_X^{-1} = \boldsymbol{Q}_x^{-1} = \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{x}})\end{aligned} \tag{20}$$

很显然，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}^*) < \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{x}})$，意味着模型（1）的方差估计值比无约束时的要小。此时残差为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}) + O(1/n)\\ &= \boldsymbol{A}\{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}\}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_X\boldsymbol{C}^T]^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + O(1/n)\end{aligned} \tag{21}$$

根据附有限制条件的间接平差原理，可以得模型（1）单位权方差为[11]

$$\hat{\sigma}^2 = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}/(n-t+1) \tag{22}$$

3 基本算法流程及数值算例

3.1 算法

算法描述：基于以上性质建立了以下算法

1）选取 p 充分小，$u^0>0$，且 $\sigma=10^6$（或其它较大的常数），令 $k=0$；

2）求解；

$$\boldsymbol{X}^k=\arg\min_{X\in\Omega}F(\boldsymbol{X},u^k,p_k)$$

3）如果 $u_i^k g_i(\boldsymbol{X}^k)=0$，$i=1,2,\cdots,m$ 成立，则 $\boldsymbol{X}^k$ 是平差结果；否则转步骤 4)；

4）修正 u^k，采用势函数迭代式

$$u_i^{k+1}=u^k[1-g_i(X^k)]^{-\frac{1}{p_k}-1},\ i=1,2,\cdots,m$$

选取 p_{k+1}，使得 $|p_{k+1}|<|p_k|$，并满足 $\lim\limits_{k\to\infty}|p_k|=0$（例如，$|p_{k+1}|=\xi|p_k|$，其中，$\xi\in$（0，1)；

5）令 $k=k+1$，转步骤 2)。

3.2 数值算例

为了说明基于势函数算法对求解附不等式的平差模型同样有效，并将其结果与其它常用的方法进行比较，本文引用了文献[7，12～13]的算例，算例的观测值及观测方程系数如表 1 所示，在该实例中，不等式约束 $\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_0\leqslant 0$，未知参数 x 的监测范围为$-0.1\leqslant x_i\leqslant 2$，$i=1，2，3，4$。

表 1 算例的原始数据

Tab. 1 Example of the original data

$\boldsymbol{A}$				$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{v}$
0.950 1	0.762 0	0.615 3	0.405 7	0.057 8	0.045 2
0.231 1	0.456 4	0.791 9	0.935 4	0.352 8	0.076 7
0.606 8	0.018 5	0.921 8	0.916 9	0.813 1	−0.356 1
0.485 9	0.821 4	0.738 2	0.410 2	0.009 8	0.161 5
0.891 2	0.444 7	0.176 2	0.893 6	0.138 8	0.079 6
$\boldsymbol{B}_0$				$\boldsymbol{d}_0$	
0.202 7	0.272 1	0.746 7	0.465 9	0.525 1	
0.198 7	0.198 8	0.445 0	0.418 6	0.202 6	
0.603 7	0.015 2	0.931 8	0.846 2	0.672 1	
$-0.1\leqslant x_i\leqslant 2\quad i=1,2,3,4$					

由文献［1］提出的基于众数的 BAYS 方法得到的结果 $\boldsymbol{x}^*=[-0.100\,0,-0.100\,0,0.213\,7,0.351\,7]$。由大家熟知的单纯形算法得到的结果以及由文献［12］提出的基于内罚函数法的遗传算法的结果分别如表 2 所示。

表 2 四种方法的结果比较

Tab. 2 Comparing the results of four methods

算法（方法）	单纯形算法	Bayesian 算法	遗传算法	势函数算法
x_1	−0.100 0	−0.100 0	−0.100 0	−0.1000
x_2	−0.100 0	−0.100 0	−0.100 0	−0.099 96
x_3	0.215 2	0.213 7	0.213 7	0.213 6
x_4	0.350 2	0.351 7	0.351 8	0.351 7
φ	$0.75e^{-5}$	$0.05e^{-7}$	$0.02e^{-6}$	$0.05e^{-7}$

4 结论

附不等式约束的平差模型在工程实践中经常遇到，然而由于经典平差理论的不完善和各种算法的复杂性，目前仍没有得到广泛应用。本文直接引用势函数，将不等式约束条件转换为无约束，结合增广拉格朗日函数最优性条件，通过一定的

数学推导并迭代得到平差结果，通过对比证明该算法具有很强的可操作性。就势函数算法本身可以得到如下结论：

1）拉格朗日极值原理是推导最小二乘平差模型较常用的方法，本文结合势函数与增广拉格朗日函数的算法，流程简单、直观、易懂，容易在测绘实践中推广使用；

2）附不等式约束的传统算法不能较好地解决约束转换平差结果与精度评定的显式表达式问题，本文通过 K-T 最优化条件的势函数性质并结合平差理论可以更好地解决这些问题。

［参考文献］(References)

［1］ ZHU J，SANTERRE R，CHANG X W. A bayesian method for linear，inequality-constrained adjustment and its application to GPS position[J]. Journal of Geodesy，2005，78(19)：528～534.

［2］ ZHU J J，SANTERRE R. Improvement of GPS ambiguity resolution using prior height information：Part I：the method by using height validation[J]. Journal of Central South University of Technology(English Edition)，2002，9(3)：186～190.

［3］ LU G，KRAKIWSKY E J，LACHAPELLE G. Application of inequality constraint least squares to GPS navigation under selective availability[J]. Manuscripta Geodesy，1993(18)：124～130.

［4］ ZHU J，SANTERRE R. Improvement of GPS phase ambiguity resolution using prior height information as a quasi-observation[J]. Geomatica，2002(56)：211～221.

［5］ REMONDI B W. Real time centimetre-accuracy GPS：initializing while in motion[J]. Proceedings of the Institute of Navigation ION GPS，1992(92)：1053～1061.

［6］ SCHAFFRIN B. Ausgleichung mit bedingungs-ungleichungen[J]. AVN，1981(6)：227～238.

［7］ PENG J H，GUO C X，ZHANG H P. An aggregate constraint method for inequality-constrained least squares problem[J]. Journal of Geodesy，2006(10)：510～519.

［8］ RAO C R，TOUTENBURG H. Linear model-least squares and alternatives[M]. New York：The Press of Berlin Heidelberg University，1999.

［9］ 施光燕，董家礼. 最优化方法[M]. 北京：高等教育出版社，2004.
SHI G Y，DONG J L. Optimization methods[M]. Beijing：Higher Education Press，2004.（in Chinese）

［10］ 贺素香，张立卫，李兴斯. 不等式约束优化问题的一个势函数[J]. 数学进展，2004，33 (3)：343～350.
HE S X，ZHANG L W，LI X S. A potential function for solving inequality constrained optimization problems[J]. Advances in Mathematics，2004，33(3)：343～350.（in Chinese）

［11］ 於宗俦. 测量平差基础[M]. 武汉：武汉测绘大学出版社，2001.
YU Z C. The basis of surveying adjustment[M]. Wuhan：Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Press，2001.（in Chinese）

［12］ 朱建军，欧阳文森. 基于遗传算法解决附有不等式约束的最小二乘平差问题的研究[J]. 工程勘察，2006 (3)：61～65.
ZHU J J，OUYANG W S. Solving the LICA problem by GA method[J]. Journal of Geotechnical Investigation & Surveying，2006(3)：61～65.（in Chinese）

［13］ 欧阳文森，朱建军. 应用 Matlab 优化工具箱处理附线性不等式约束的最小二乘平差问题[J]. 测绘工程，2006 (3)：8～12.
OUYANG W S，ZHU J J. Solving the LICLA problem by Matlab optimization toolbox[J]. Engineering of Surveying and Mapping，2006(3)：8～12.（in Chinese）

［14］ 朱建青，汤源. 约束最小二乘问题的几个算法[J]. 测绘学院学报，2001，18 (2)：90～92.
ZHU J Q，TANG Y. Several algorithms for Least-Squares problems with constraints[J]. Journal of the Institute of Surveying and Mapping，2001，18(2)：90～92.（in Chinese）