

探测系统的侧向偏移和角向倾斜对光束 轨道角动量谱测量的影响研究

刘义东, 高春清, 齐晓庆

(北京理工大学信息科学技术学院, 北京 100081)

摘要: 在利用光束轨道角动量进行自由空间光通信的时候, 轨道角动量谱受探测系统相对于入射光束的侧向偏移和角向倾斜的影响比较严重, 进而引起轨道角动量态误判和误码的增加。为了解决这个问题, 需要分析探测系统的侧向偏移和角向倾斜对轨道角动量谱测量的影响。本文采用量子算符方法来分析自由空间光通信中系统非对准对光束轨道角动量谱的影响机理, 并通过数值计算对这种影响机理给予直观地展示。这种方法具有明确的物理意义和简洁的数学表示。研究表明, 探测系统的侧向偏移和角向倾斜对轨道角动量谱都有相似的影响, 其特征服从第一类贝塞尔函数。该研究对修正利用光束轨道角动量进行自由空间通信系统的校准有重要意义。

关键词: 物理电子学; 轨道角动量; 轨道角动量谱; 自由空间光通信

中图分类号: TN929.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 1674-2850(2008)08-0810-6

Influence on the orbital angular momentum spectrum caused by the misalignment of detection system

LIU Yidong, GAO Chunqing, QI Xiaoqing

(School of Information Science and Technology, Beijing
Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract: When the orbital angular momentum of light beam is used in the free space optical communication, the misalignments of the detection system, i. e. lateral shift and angular tilt, will diffuse the orbital angular momentum spectrum and therefore cause the wrong orbital angular momentum states and error emergence. To deal with this problem, the affections on the orbital angular momentum spectrum of the misalignments should be clarified. In this work, a quantum operator method is used to analyse the influence on the orbital angular momentum spectrum caused by the misalignments of the detection system in free space optical communication, and the calculation is also given to directly show the mechanism of the affections. This work also gives clear physical meaning and simple mathematical expression of these two kinds of affections and the results show similar influence caused by the two kinds of misalignment which obey the rule denoted by the first kind Bessel function. The work is important in the correction of the orbital angular momentum spectrum in free space optical communication by using the orbital angular momentum.

Key words: physical electronics; orbital angular momentum; orbital angular momentum spectrum; free space optical communication

0 引言

光束携带能量、动量和角动量。光束的角动量可以分成两个部分; 与光束的偏振相关的自旋角动

基金项目: 国家自然科学基金 (60778002); 高等学校博士学科点专项科研基金 (20050007027); 教育部“新世纪优秀人才”资助计划 (NCET-05-0178)

作者简介: 刘义东 (1981-), 男, 博士研究生, 主要研究方向: 激光物理、光束特性

通信联系人: 高春清, 教授, 主要研究方向: 固体激光器、激光物理, E-mail: gao@bit.edu.cn

量和与光场角向分布相关的轨道角动量。光束的自旋角动量较早为人们所认识，1936年 BETH^[1]首次用实验测量了光束的自旋角动量和著名的物理常数 \hbar 的值。光束的轨道角动量直到 1992年 ALLEN^[2]的研究才被人们全面认识。ALLEN 发现具有螺旋形波前结构 $\exp(i l \varphi)$ 的光束每个光子携带轨道角动量为 $l\hbar$ 。从此光束的轨道角动量得到了广泛的重视和研究，并在激光生物和信息传输和处理上显示出潜在优势。

光束轨道角动量的特征函数是螺旋谐波，特征值是任意整数 $l\hbar$ 。这些螺旋谐波可以构成无穷维希尔伯特空间^[3]，奠定了光束轨道角动量在信息传输和处理上的物理基础。MOLINA-TERRIZA^[3]将光束展开成螺旋谐波函数 $\exp(i l \varphi)$ 的线性叠加，形成轨道角动量谱。TORNER 等^[4]采用这种方法试图通过分析具有特定轨道角动量的光束（如轨道角动量为 0 的高斯光束）经目标反射或透射后的各轨道角动量态上的成分来分析目标的性质，并将轨道角动量谱称作螺旋谱，研究了经过相位突变、相位梯度、幅度梯度情况下的螺旋谱特征。

GIBSON 等^[5]首次提出了一个利用轨道角动量谱进行自由空间信息传输的方案。在自由空间通信的时候，系统总会存在非对准状态，即探测系统相对于入射光束的侧向偏移和角向倾斜。VASNETSOV 等^[6]采用数学推导和数值计算方法，给出在系统没有准确对准的情况下，光束轨道角动量谱的变化情况。他们仅考虑径向量子数为 0 的模式，但是由于所有的拉盖尔—高斯模包括径向量子数不为 0 的模式一起构成正交完备集，因此这种分析是不完善的。本文采用新的符号描述光束的角向倾斜和侧向偏移，然后利用光束轨道角动量谱和光束旋转算符的全平均值的共轭关系导出光束轨道角动量谱的表达式，并给出相应的数值计算。

1 轨道角动量谱

轨道角动量谱是螺旋谐波的相对功率^[3]，也被称作螺旋谱^[4]。定义一个以绕着 z 轴旋转的方位角为自变量的函数^[7]

$$M(\theta) = \langle \Psi | \exp(i\theta \hat{l}_z) | \Psi \rangle \quad (1)$$

其中， $|\Psi\rangle$ 为光场归一化波函数； $\hat{l}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ 为角动量算符； \hat{x} 和 \hat{y} 为横截面上的位置算符； \hat{p}_x 和 \hat{p}_y 为横截面上的动量算符。式 (1) 是旋转算符在光波场中的全平均值。函数 $M(\theta)$ 的共轭量就是轨道角动量谱^[7]

$$R_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(\theta) \exp(-i l \theta) d\theta \quad (2)$$

采用拉盖尔—高斯模 $|p, l\rangle$ 的正交完备性，这里 p 是径向量子数， l 是角量子数，可以得到

$$\sum_p |p, l\rangle \langle p, l| = 1 \quad (3)$$

根据角动量算符的本征方程可以得到

$$\hat{l}_z |p, l\rangle = l |p, l\rangle \quad (4)$$

根据式 (3) 和式 (4)，式 (1) 可以写成

$$\begin{aligned} M(\theta) &= \langle \Psi | \exp(i\theta \hat{l}_z) | \Psi \rangle \\ &= \sum_p \sum_{p'} \langle \Psi | p, l \rangle \langle p, l | \exp(i\theta \hat{l}_z) | p', l' \rangle \langle p', l' | \Psi \rangle \\ &= \sum_p \exp(i l \theta) \langle \Psi | p, l \rangle \langle p, l | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

再结合式 (2) 可以得到轨道角动量谱的解析表达式

$$R_l = \sum_p \langle \Psi | p, l \rangle \langle p, l | \Psi \rangle \quad (6)$$

此式采用了迪拉克符号, 使得书写更加清晰, 物理意义更加明显, 推导分析时也更加方便。

2 非对准条件 (侧向偏移和角向倾斜)

假设

$$|\Psi\rangle = \vec{T} |\Phi\rangle \quad (7)$$

为实际需要处理的光波场, 其中 $|\Phi\rangle$ 为理想对准的光波场, 符号 \vec{T} 表示非对准条件作用, 它将使理想对准的光波场变成实际的光波场。符号 \vec{T} 顶上的箭头表示对右侧的波函数作用。

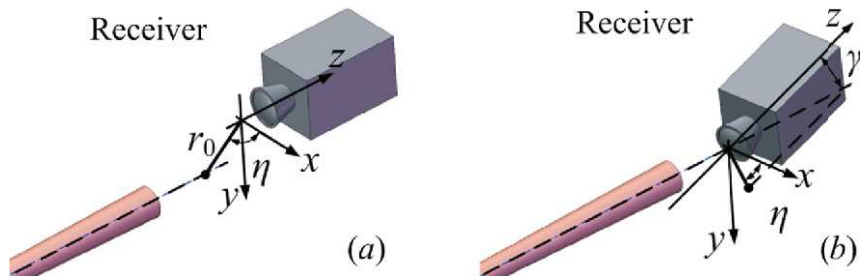


图1 两种非对准条件: (a) 侧向偏移; (b) 角向倾斜
Fig. 1 Two kinds of misalignment: (a) lateral shift; (b) angular tilt

图1为两种不同的非对准条件, 即侧向偏移和角向倾斜。对侧向偏移, 符号 \vec{T} 定义为

$$\vec{T}^s(r_0, \eta)u(x, y) = u(x - r_0 \cos\eta, y - r_0 \sin\eta) \quad (8)$$

其中, r_0 为光束轴和接收系统轴之间的距离; η 为光束轴的角位置; 上标 s 为侧向偏移 (lateral shift)。角向偏移定义为

$$\vec{T}^t(\eta, \gamma)u(x, y) = \exp[ikr \sin\gamma \cos(\varphi - \eta)]u(x, y) \quad (9)$$

其中, η 为光束方位角; γ 为光束方向偏离角; 上标 t 为角向偏斜 (angular tilt)。

结合式 (3)、式 (6) 和式 (7) 可以得到轨道角动量谱的表达式

$$\mathbf{R}_l = \sum_p \left| \sum_{p_0 l_0} \langle p l | \vec{T} | p_0 l_0 \rangle \langle p_0 l_0 | \Phi \rangle \right|^2 \quad (10)$$

其中, $\langle p_0 l_0 | \Phi \rangle$ 为波函数在拉盖尔-高斯模上的展开系数, $\langle p l | \vec{T} | p_0 l_0 \rangle$ 可以理解成在操作 \vec{T} 的作用下从拉盖尔-高斯模 $|p_0 l_0\rangle$ “跃迁”到 $|p l\rangle$ 的几率幅。矩阵元 $\mathbf{M}_{p l, p_0 l_0} \equiv \langle p l | \vec{T} | p_0 l_0 \rangle$ 与原子物理中的跃迁矩阵元有点相似, 但是更为复杂。为了方便起见, 此后将此矩阵叫做“跃迁矩阵”。

将表示侧向偏移符号的式 (8) 代入, 可以得到相应的跃迁矩阵。此矩阵元在空域的求解极其复杂, 将在空间频域来计算。将跃迁矩阵元写成积分的形式, 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{p l, p_0 l_0} &= \iint u_{p l}^*(x, y) u_{p_0 l_0}(x - r_0 \cos\eta, y + r_0 \sin\eta) dx dy \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint F_2^{-1} \{ F_2[u_{p l}^*(x, y)] \otimes F_2[u_{p_0 l_0}(x - r_0 \cos\eta, y + r_0 \sin\eta)] \} dx dy \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $F_2(^*)$ 和 $F_2^{-1}(^*)$ 分别为二维傅里叶变换和二维傅里叶反变换, \otimes 为卷积符号。

根据厄米—高斯光束的二维傅里叶变换^[8]、拉盖尔—高斯模和厄米—高斯模之间的关系^[9]可以得到拉盖尔—高斯模的二维傅里叶变化为

$$F_2[u_{\mu}(x, y)_{\omega_0}] = i^{2p+l} 2\pi u_{\mu}(\kappa_x, \kappa_y)_{2/\omega_0} \quad (12)$$

其中, 下标中的 ω_0 和 $2/\omega_0$ 分别为空域和空间频域中的拉盖尔—高斯模的束腰半径。空域的侧向偏移将会引起空间频域相位因子的出现, 即

$$F_2[u_{\mu}(x-x_0, y-y_0)_{\omega_0}] = i^{2p+l} 2\pi u_{\mu}(\kappa_x, \kappa_y)_{2/\omega_0} \exp(-i\kappa_x x_0 - i\kappa_y y_0) \quad (13)$$

应用式 (12) 和式 (13), 式 (11) 可以简化成

$$\mathbf{M}_{\mu, p_0 l_0}^s = (-1)^{p+p_0+l} i^{|l+l_0|} \iint u_{\mu}^*(\kappa'_x, \kappa'_y)_{2/\omega_0} u_{p_0 l_0}(\kappa'_x, \kappa'_y)_{2/\omega_0} \times \exp(i\kappa'_x r_0 \cos\eta - i\kappa'_y r_0 \sin\eta) d\kappa'_x d\kappa'_y \quad (14)$$

由于式 (14) 中的积分对积分变量符号的选择没有关系, 可以重新写成空域内积分的形式

$$\mathbf{M}_{\mu, p_0 l_0}^s = (-1)^{p+p_0+l} i^{|l+l_0|} \iint u_{\mu}^*(x, y)_{\omega_0} u_{p_0 l_0}(x, y)_{\omega_0} \exp\left[-i\frac{2rr_0}{\omega_0^2} \cos(\varphi - \eta)\right] dx dy \quad (15)$$

用迪拉克符号表示式 (15) 为

$$\mathbf{M}_{\mu, p_0 l_0}^s = (-1)^{p+p_0+l} i^{|l+l_0|} \langle pl | \exp\left(-i\frac{2rr_0}{\omega_0^2} \cos(\varphi - \eta)\right) | p_0 l_0 \rangle \quad (16)$$

考虑到第一类贝塞尔函数的性质

$$\exp(iz \sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) \exp(in\theta) \quad (17)$$

式 (15) 可以展开成

$$\mathbf{M}_{\mu, p_0 l_0}^s = (-1)^{p+p_0+l} i^{|l+l_0|} \exp\left[-i(l-l_0)\left(\eta + \frac{\pi}{2}\right)\right] \times \langle pl | J_{l-l_0}\left(\frac{2rr_0}{\omega_0^2}\right) \exp[i(l-l_0)\varphi] | p_0 l_0 \rangle \quad (18)$$

式 (18) 表明侧向偏移导致的模式展宽服从由第一类贝塞尔函数决定的规律, 随着侧向偏移量 r_0 的增大而弥散越严重。

对式 (9) 给出的角向倾斜操作, 类似地可以得到侧向偏移的跃迁矩阵元

$$\mathbf{M}_{\mu, p_0 l_0}^s = \exp\left[i(l-l_0)\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)\right] \langle pl | J_{l-l_0}(kr \sin\eta) \exp[i(l-l_0)\varphi] | p_0, l_0 \rangle \quad (19)$$

式 (19) 显示角向偏移时轨道角动量模式弥散具有与侧向偏移时类似的性质。由式 (10)、式 (18) 和式 (19) 定义的光束轨道角动量谱是参考文献[6]中描述的非对准条件更普遍的情况, 在那里仅仅讨论了拉盖尔—高斯模的径向量子数为 0 的情况。采用这三个公式还可以方便地得到任意叠加的拉盖尔—高斯光束在两种非对准条件下的轨道角动量谱。对两种非对准条件均存在的时候, 作用可以用下面的符号表示

$$\vec{T} = \vec{T}^s \quad (20)$$

其中的侧向偏移操作和角向偏移操作可以互换, 但是在互换的时候参数会发生变化。进一步可以得到两种非对准条件都存在时的跃迁矩阵元

$$\begin{aligned}
 M_{\mu, p_0 l_0} &\equiv \langle p l | \vec{T}^r \vec{T}^s | p_0 l_0 \rangle \\
 &= \sum_{p' l'} \langle p l | \vec{T}^r | p' l' \rangle \langle p' l' | \vec{T}^s | p_0 l_0 \rangle \\
 &= \sum_{p' l'} M_{\mu, p' l'} M_{p' l', p_0 l_0}
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

本文对轨道角动量谱的计算非常简洁, 更适合计算机程序处理。将式(18)和式(19)代入式(10), 根据前面的分析可以看出, 对准条件越差, 产生的模式弥散越严重。在利用光束轨道角动量进行信息传输的时候是很不利的, 因为这样会导致系统的信噪比降低, 系统的误码率增加。

3 数值计算与分析

图2给出不同阶次的拉盖尔—高斯模在不同侧向偏移时候的轨道角动量谱, 是根据式(10)和式(18)计算得到的, 侧向偏移量以基模高斯光束的束腰半径 w_0 衡量。通过从各列的对比可以看出, 随着侧向偏移的增加, 轨道角动量谱弥散更甚。通过从上到下的各行可以看出, 随着拉盖尔—高斯模的阶次 $2p + |l|$ 的增加, 轨道角动量谱弥散更甚。第一行的光束为基模拉盖尔—高斯光束, 其阶次为0; 第二行为阶次为3的拉盖尔—高斯模; 第三行为阶次为6的拉盖尔—高斯光束。可以看出, 大的径向量子数导致阶次的增加, 进而导致轨道角动量谱的展宽。

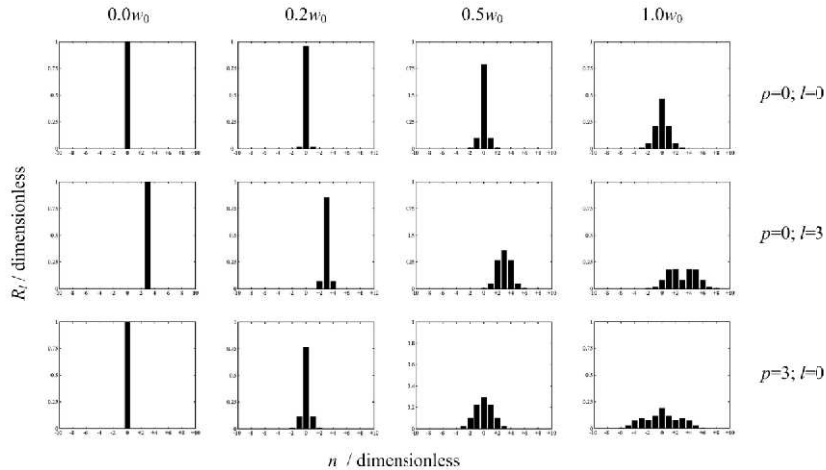


图2 侧向偏移下的轨道角动量谱的特征

Fig.2 Characteristics of the orbital angular momentum spectrum with lateral shift

对于角向倾斜, 根据式(19)和式(18)的相似性可以看出, 其与侧向平移具有相同的结构。因此在计算的时候可以对参数的系数稍加改变, 即可由侧向偏移得到角向倾斜时候的轨道角动量谱。因此, 可以从侧向偏移的轨道角动量谱特征推断出角向倾斜的轨道角动量谱特征。这里也就不计算角向倾斜的轨道角动量谱。

4 总结

本文采用量子算符方法来分析自由空间光通信中系统非对准对光束轨道角动量谱的影响。这种方法具有明确的物理意义和更为简洁的数学表示。计算结果表明较大的径向量子数会导致阶次的增加, 进而导致光束轨道角动量谱的弥散更加严重。

[参考文献] (References)

[1] BETH R A. Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light[J]. Phys. Rev., 1936(50):

- 115~125.
- [2] ALLEN L, BEIJERSBERGEN M W, SPREEUW R J C, et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes[J]. *Phys. Rev. A.*, 1992, 45(11): 8185~8190.
 - [3] MOLINA-TERRIZA G, TORRES J P, TORNER L. Management of the angular momentum of light: preparation of photons in multidimensional vector states of angular momentum[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, 88(1): 013601/1~013601/4.
 - [4] TORNER L, TORRES J P, CARRASCO S. Digital spiral imaging[J]. *Opt. Express*, 2005, 13(3): 873~881.
 - [5] GIBSON G, COURTIAL J, PADGETT M J, et al. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum[J]. *Opt. Express*, 2004, 12(22): 5448~5456.
 - [6] VASNETSOV M V, PAS'KO V A, SOSKIN M S. Analysis of orbital angular momentum of a misaligned optical beam[J]. *New J. Phys.*, 2005, 7(46): 1~17.
 - [7] ZAMBRINI R, BARNETT S M. Quasi-intrinsic angular momentum and the measurement of its spectrum[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, 96(11): 113901.
 - [8] BOGUSH A J J, ELKINS R E. Gaussian field expansions for large aperture antennas[J]. *IEEE Trans. Antennas Propagat*, 1986, AP-34(2): 228~243.
 - [9] O'NEIL A T, COURTIAL J. Mode transformations in terms of the constituent Hermite-Gaussian or Laguerre-Gaussian modes and the variable-phase mode converter[J]. *Opt. Commun.*, 2000, 181(1): 35~45.