$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p} \tag{1}$$

定义弹性范围为 $\varphi\ (\hat{\varepsilon}_{kl})$，则背应力可以定义为

$$\sigma_{ij}^{0} = \frac{\int_{\varphi(\hat{\varepsilon}_{lk})} \sigma_{ij}\, \mathrm{d}\Omega}{\int_{\phi(\hat{\varepsilon}_{lk})} \mathrm{d}\Omega} \tag{2}$$

所以弹性响应泛函形式为

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{0} = \hat{\sigma}_{ij}(\varepsilon_{lk}^{e}, \varepsilon_{kl}^{p}, e_{p}) \tag{3}$$

其中，$e_{p}(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\mathrm{d}/\mathrm{d}t(\hat{\varepsilon}_{ij}^{p}(t))}\ \sqrt{\mathrm{d}/\mathrm{d}t\hat{\varepsilon}_{ij}^{p}(t)}\,\mathrm{d}\tau$

有了以上定义，就可以定义屈服函数为描述应变空间弹性区 $\Sigma(\hat{\varepsilon}_{kl})$ 的泛函

$$g(\varepsilon_{kl}^{e},\ \varepsilon_{kl}^{p},\ e_{p}) \leqslant 0 \tag{4}$$

在应力空间中描述为

$$f(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{0},\ \varepsilon_{ij}^{p},\ e_{p}) \leqslant 0 \tag{5}$$

若是奇异屈服面，可设由几支正则屈服面构成，在正则点上的理论可见文献[2]，本文主要考虑奇异点。为了简单起见，设奇异点是由如下的两支正则屈服面交成

$$f_{\alpha}(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{0},\ \varepsilon_{ij}^{p},\ e_{p}) = 0 \quad (\alpha = 1,\ 2) \tag{6}$$

或在应变空间中表述为

$$g_{\alpha}(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{0}, \varepsilon_{ij}^{p}, e_{p}) = 0 \quad (\alpha = 1,\ 2) \tag{7}$$

## 2 加卸载法则

考察奇异点上的应力状态[3~4]，有三种情况。第一，一个无限小的 $\mathrm{d}\sigma$ 作用导致的新状态是一个弹性状态（$f_{\alpha}<0$ 的状态），这时有 $\max\ \mathrm{d}f_{\alpha}<0$，材料的响应是纯弹性的，这个过程是卸载。第二，新状态是一种中性状态（至少有一个 $f_{\alpha}=0$ 的状态），这时 $\max\ \mathrm{d}f_{\alpha}=0$，响应是纯弹性的，这个过程叫中性变载。第三，对无限小作用的响应是弹塑性的，这个过程叫加载。

由 Drucker 公设可导出稳定性公式

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}\, \mathrm{d}\varepsilon^{p} \geqslant 0 \tag{8}$$

在奇异点处有 Koiter 流动法则成立，为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} = \sum_{\alpha}^{1,2} \mathrm{d}\lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \tag{9}$$

由式（8）和式（9）可得

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} \sum_{\alpha}^{1,2} \mathrm{d}\lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \geqslant 0 \tag{10}$$

可令 $l_{\alpha}=\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij}$，在加载情况下至少有一个 $\mathrm{d}\lambda_{\alpha}>0$，必然有

$$\max \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \mathrm{d}\sigma_{ij} > 0 \tag{11}$$

在中性变载和卸载时 $d\lambda_\alpha=0$，又 $df_\alpha=0$，而卸载时 $df_\alpha<0$，则得到完整的奇异点加卸载法则为

$$\max l_\alpha \begin{cases} <0 & \text{卸载} \\ =0 & \text{中性变载} \\ >0 & \text{加载} \end{cases} \tag{12}$$

对于在奇异点处加载，还需要进一步判别是完全加载还是部分加载[5~8]。完全加载是指 $d\lambda_\alpha>0$，而部分加载是指只有一个 $d\lambda_\alpha>0$，另一个 $d\lambda_\alpha=0$，完全加载和部分加载有不同的本构方程形式。按式(12)，在奇异点加载，有 $\max l_\alpha>0$，如有 $\min l_\alpha\leqslant 0$，对应的是部分加载。以下将指出，即使 $\max l_\alpha>0$时也有可能为部分加载情况。由一致性条件

$$df_\alpha(\sigma_{ij}-\sigma^0_{ij},\varepsilon^p_{ij},e_p)=\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon^p_{ij}}d\varepsilon^p_{ij}+\frac{\partial f}{\partial e_p}de_p=0 \tag{13}$$

和式（9）且 $de_p=d\varepsilon^p_{ij}$，可得

$$df_\alpha=\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon^p_{ij}}\sum_\alpha^{1,2}d\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\sigma_{ij}}+\frac{\partial f}{\partial e_p}\sum_\alpha^{1,2}d\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\sigma_{ij}}=0 \tag{14}$$

解上述方程组，可得

$$[d\lambda_\alpha]=\boldsymbol{A}^{-1}[l_\alpha] \tag{15}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \tag{16}$$

$$a_{rs}=\frac{\partial f_r}{\partial\varepsilon^p_{ij}}\frac{\partial f_s}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{\partial f_r}{\partial e_p}\frac{\partial f_s}{\partial\sigma_{ij}}\quad(r,s=1,2) \tag{17}$$

由式（15），$\min l_\alpha>0$，也不能保证 $d\lambda_\alpha>0$，除非 $a_{12}=a_{21}=0$，可以利用式（15）得到区别部分加载和完全加载的准则是

$$\min\left[\frac{1}{\det\boldsymbol{A}}(a_{22}l_1-a_{12}l_2),\ \frac{1}{\det\boldsymbol{A}}(-a_{21}l_1+a_{11}l_2)\right]\begin{cases}\leqslant 0 & \text{部分加载}\\ >0 & \text{完全加载}\end{cases} \tag{18}$$

式（12）和式（17）一起组成了完整的奇异点加卸载法则。

## 3 本构方程

在 Lagrange 型有限变形弹塑性本构理论中，基于Ⅱ'yushin 公设得出的随动强化律及本构方程为

$$d\sigma^0_{ij}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}d\varepsilon_{ij}-d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)-\gamma\frac{\partial g_\alpha}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{19}$$

$$d\sigma_{ij}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\varepsilon_{ij}-\gamma\frac{\partial g}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{20}$$

在小变形情况下，假设是各向同性体，且弹性常数不变，有$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}=D_{ijkl}$，且由式（19）

$$d\sigma^0_{ij}=D_{ijkl}d\varepsilon_{ij}-d\sigma^e_{ij}-\gamma\frac{\partial g_\alpha}{\partial\varepsilon_{ij}}=D_{ijkl}d\varepsilon_{ij}-D_{ijkl}d\varepsilon^e_{ij}-\gamma\frac{\partial g_\alpha}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{21}$$

可设：$\gamma=\hat{g}\beta$，$\beta>0$

$$d\sigma_{ij}^{0} = D_{ijkl} d\varepsilon_{ij}^{p} - \beta \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \tag{22}$$

则本构方程表示为

$$d\sigma_{ij} = \left(D_{ijkl} - \beta_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \varepsilon_{kl}}\right) d\varepsilon_{kl} \tag{23}$$

若应力点在奇异点上，可根据 Koiter 流动法则

$$\sigma_{\sigma} = -\sum_{\alpha}^{1,2} d\lambda_{\alpha} \gamma_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{24}$$

则背应力演化方程为

$$d\sigma_{ij}^{0} = D_{ijkl} d\varepsilon_{ij}^{p} - \sum_{\alpha}^{1,2} d\lambda_{\alpha} \beta_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \tag{25}$$

因为应力点在相邻屈服面的交线上，且加载使其依旧在两屈服面的交线上。若应力点在 $f_1$ 上，则 $d\lambda_1=1$，$d\lambda_2=0$；若应力点在 $f_2$ 上，则 $d\lambda_1=0$，$d\lambda_2=1$；若在两屈服面的交线上，也应满足连续性，可设 $d\lambda_1+d\lambda_2=1$，由式（15）得

$$[d\lambda_{\alpha}] = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} \end{bmatrix} d\sigma_{ij} \tag{26}$$

由 $d\lambda_1+d\lambda_2=1$，可设

$$\begin{cases} B_1 = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}\left(a_{22} \dfrac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} - a_{12} \dfrac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\right) \\ B_2 = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}\left(-a_{21} \dfrac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + a_{11} \dfrac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}\right) \end{cases} \tag{27}$$

可得

$$\begin{cases} d\lambda_1 = \dfrac{B_1}{B_1 + B_2} \\ d\lambda_2 = \dfrac{B_2}{B_1 + B_2} \end{cases} \tag{28}$$

所以背应力的演化方程为

$$d\sigma_{ij}^{0} = D_{ijkl} \sum_{\alpha}^{1,2} d\lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} - \sum_{\alpha}^{1,2} d\lambda_{\alpha} \beta_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \tag{29}$$

现在建立奇异点的本构方程，因为

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{0} = D_{ijkl}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{p}) \tag{30}$$

将式（9）代入，两边求导，得

$$d\sigma_{ij} - d\sigma_{ij}^{0} = D_{ijkl}(d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^{p}) = D_{ijkl}\left(d\varepsilon_{kl} - \sum_{\alpha}^{1,2} d\lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}}\right) \tag{31}$$

对于卸载和中性变载，$d\sigma_{ij}^{0}=0$，$d\lambda_{\alpha}=0$，为纯弹性响应，则

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{ij} \tag{32}$$

对于加载时，如是部分加载，不妨设在 $f_r=0$ 上加载，这时 $\mathrm{d}\lambda_r$ 可用一致性条件求得

$$\mathrm{d}\lambda_r = -\frac{1}{a_{rr}}\frac{\partial f_r}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij} \quad (r=1,2) \tag{33}$$

其中，$a_{rr}$的表达式由式（17）表示，此时本构方程为

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = \left(D_{ijkl} - \beta_r \frac{\partial g_r}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial g_r}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{34}$$

由式（22）确定了背应力的演化

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma^0_{ij} &= D_{ijkl}\sum_{\alpha}^{1,2}\mathrm{d}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} - \beta_r \frac{\partial g_r}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial g_r}{\partial \varepsilon_{ij}}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\\ &= D_{ijkl}\frac{1}{a_{rr}}\frac{\partial f_r}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij}\frac{\partial f_r}{\partial \sigma_{ij}} - \beta_r \frac{\partial g_r}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial g_r}{\partial \varepsilon_{ij}}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\\ &= \left[D_{ijkl}\frac{1}{a_{rr}}\frac{\partial f_r}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial f_r}{\partial \sigma_{ij}}\left(D_{ijkl} - \beta_r \frac{\partial g_r}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial g_r}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) - \beta_r \frac{\partial g_r}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial g_r}{\partial \varepsilon_{ij}}\right]\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\end{aligned} \tag{35}$$

若是完全加载，这时的［$\mathrm{d}\lambda_\alpha$］可由式（25）给出，此时的本构方程为

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = \left(D_{ijkl} - \sum_{\alpha}^{1,2}\mathrm{d}\lambda_\alpha\beta_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial g_\alpha}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{36}$$

背应力的演化方程为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma^0_{ij} &= D_{ijkl}\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{ij} - \sum_{\alpha}^{1,2}\mathrm{d}\lambda_\alpha\beta_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial g_\alpha}{\partial \varepsilon_{ij}}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\\ &= D_{ijkl}\sum_{\alpha}^{1,2}\mathrm{d}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} - \sum_{\alpha}^{1,2}\mathrm{d}\lambda_\alpha\beta_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial g_\alpha}{\partial \varepsilon_{ij}}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\end{aligned} \tag{37}$$

以加卸载法则（12）和（17）及奇异点的本构方程（32），（34），（36），及背应力的演化方程（35），（37）构成了完整的奇异屈服面的弹塑性本构理论。

## 4 结论

本文运用理论推导，将有限变形弹塑性本构理论应用于小变形情况下的奇异屈服面弹塑性模型，对于具有奇异屈服面的材料本构研究具有一定的意义。

### ［参考文献］(References)

［1］ CHEN L S，ZHAO X H. A mathematical theory of materials with elastic range and the definition of backstress tensor [J]. Appl. Math. Mech.，1999，20(5)：452～460.

［2］ 兰志文，陈良森，扶名福. Lagrange型有限变形弹塑性本构理论[J]. 南昌大学学报（理科版），2006，30（1）：80～83.
LAN Z W，CHEN L S，FU M F. A lagrangian finite plasticity theory[J]. Journal of Nanchang University(Natural Science)，2006，30(1)：80～83.（in Chinese）

［3］ 殷有泉. 奇异屈服面的加-卸载准则[J]. 固体力学学报，1984（2）：282～285.
YIN Y Q. Loading criteria for a singular yield surface[J]. Acta Mechanica Solida Sinica，1984(2)：282～285.（in Chinese）

［4］ 曲圣年，殷有泉. 塑性力学的Drucker公设和Ⅱ'yushin's公设[J]. 力学学报，1981（5）：47～55.
QU S N，YIN Y Q. Drucker's and Ⅱ'yushin's postulate of plasticity[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics，1981(5)：47～55.（in Chinese）

[5] 王仁，殷有泉. 工程岩石类介质的弹塑性本构关系[J]. 力学学报，1981 (4)：317～325.
WANG R，YIN Y Q. On the elasto-plastic constitutive equation of engineering rock-like materials[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics，1981(4)：317～325. (in Chinese)
[6] 殷有泉. 岩体介质渐进破坏的弹塑性本构关系[J]. 固体力学学报，1981 (1)：58～64.
YIN Y Q. Elastoplastic constitutive relations of progressive failure for rocklike media[J]. Acta Mechanica Solida Sinica，1981(1)：58～64. (in Chinese)
[7] 殷有泉，周早生. 岩土介质在奇异屈服面奇异点处的本构方程[J]. 岩石力学与工程学报，1985 (1)：33～38.
YIN Y Q，ZHOU Z S. The constitutive eqation of the rock-soil medium at the singular point on the yield surface[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，1985(1)：33～38. (in Chinese)
[8] 殷有泉. 奇异屈服面的弹塑性本构关系的应力空间表述和应变空间表述[J]. 力学学报，1986 (1)：31～38.
YIN Y Q. Stress space and strain space formulation of the elasto-plastic constitutive relations for singular yield surface[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics，1986(1)：31～38. (in Chinese)