第2卷 第1期
2009 年 1 月

www.paper.edu.cn
中国科技论文在线
Sciencepaper Online

Vol.2 NO.1
January 2009

一类二阶非线性微分方程奇异边值问题唯一整体解的精确渐近行为

冯化冰[1]，张志军[2]

（1. 兰州大学数学与统计学院，兰州　730000；
2. 烟台大学数学与信息科学学院，山东烟台　264005）

摘要：应用摄动方法和上下解方法，构造新的上下解，得到了一类半直线上二阶非线性微分方程奇异边值问题 $u''(t)=b(t)g(u(t))$，$u(t)>0$，$t>0$，$u(0)=\infty$，$u(\infty)=0$ 唯一整体解 ψ 在无穷远处的精确渐近行为。这里，$g\in C^1[0,\infty)$，$g(0)=g'(0)=0$，g 在$[0,\infty)$ 上单调递增，满足 Keller-Osserman 条件，$g(s)/s$ 在$(0,\infty)$ 上单调递增；函数 $b\in C^1(0,\infty)$，b 在$(0,\infty)$ 上是正的单调递增函数。本文完善了此问题唯一整体解的性质。

关键词：常微分方程；边值问题；唯一整体解；奇异性；渐近行为

中图分类号：O175.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1674-2850(2009)01-0080-5

The exact variation speed of the unique entire solution to a singular boundary value problem for a class of second order nonlinear differential equations

FENG Huabing[1]，ZHANG Zhijun[2]

(1. *School of Mathematics and Statistics*，*Lanzhou University*，*Lanzhou*　730000，*China*；
2. *School of Mathematics and Informational Science*，*Yantai University*，
Yantai，*Shandong*　264005，*China*)

Abstract：By perturbation method and constructing new supersolution and subsolution，this paper derives the exact variation speed at infinity of the unique entire solution ψ to the following singular boundary value problem on the half-line $u''(t)=b(t)g(u(t))$，$u(t)>0$，$t>0$，$u(0)=\infty$，$u(\infty)=0$ where $g\in C^1[0,\infty)$，$g(0)=g'(0)=0$，g is an increasing function in $[0,\infty)$，satisfies Keller-Osserman condition，$g(s)/s$ is an increasing function in $(0,\infty)$；$b\in C^1(0,\infty)$ is a positive increasing function in $(0,\infty)$. The paper completes the characteristics of the unique entire solution.

Key words：ordinary differential equation；boundary value problem；the unique entire solution；singularity；variation speed

0　引言

考虑下列半直线上二阶非线性微分方程奇异边值问题

$$u''(t)=b(t)g(u(t)),\ u(t)>0,\ t>0,\ u(0)=\infty,\ u(\infty)=0 \tag{1}$$

唯一整体解在无穷远处的精确渐近行为。这里，g 满足：

(g1) $g\in C^1[0,\infty)$，$g(0)=g'(0)=0$，g 在$[0,\infty)$ 上单调递增；

(g2) Keller-Osserman 条件：

基金项目：国家自然科学基金（10671169）
作者简介：冯化冰（1983—），女，博士研究生，主要研究方向：偏微分方程
通信联系人：张志军，教授，主要研究方向：偏微分方程. E-mail：zhangzj@ytu.edu.cn

$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{G(s)}} < \infty,\ a > 0,\ G(s) = \int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau,\ s \geqslant 0;$$

(g3) $g^*(s) = g(s) = s$ 在$[0, \infty)$ 单调递增；

(g4) 存在 $q > 1$，使得 $c_0 : \lim\limits_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s^q} \in (0, \infty)$.

b 满足：

(b1) $b \in C^1(0, \infty)$，b 在$(0, \infty)$ 上是正的单调递增函数；

(b2) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{K(t)}{k(t)}\right]$: $C_k \in [0, \infty)$，$k(t) := \sqrt{b(t)}$，$K(t) = \int_0^t k(s)\mathrm{d}s$.

式（1）来源于边界 blow-up 的非线性椭圆型问题解在边界附近的精确渐近行为的研究中，见文献[1]～[9]。最近，CANO-CASANOVA 等[1]得到了结果。

设 b 满足：

(b1) $b \in C[0, \infty)$，b 在$(0, \infty)$ 上是正的单调递增函数；g 满足条件（g1）和条件（g2），则式（1）存在唯一整体解 $\psi \in C^2(0, \infty)$. 而且，如果 g 还满足条件（g3）和条件（g5），存在 $p>1$ 使得

$$C_0 := \lim_{s\to\infty} \frac{g(s)}{s^p} \in (0, \infty);$$

b 还满足：
$$b_0 := \lim_{t\to 0^+} \frac{\Gamma(t)\Gamma''(t)}{[\Gamma'(t)]^2} \in (0, \infty);$$

(b2) 则 ψ 满足：
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\psi(t)}{\Gamma(t)} = b_0^{-p/(p-1)} \left(\frac{p+1}{p-1}\right)^{(p+1)/(p-1)} C_0^{-1/(p-1)}. \tag{2}$$

这里，$R>0$ 是某一个常数

$$\Gamma(t) = \int_t^R \frac{\mathrm{d}s}{A(s)},\ A(t) = \left\{\int_0^t [b(\tau)]^{1/(p+1)}\mathrm{d}\tau\right\}^{(p+1)/(p-1)},\quad t \in (0, R]. \tag{3}$$

注意到，条件（g1）和条件（g4）隐含条件（g2）。但文献[1]未讨论 ψ 在无穷远处的精确渐近行为。

本文在权函数 b 满足条件（b1）和条件（b2）下，应用摄动方法和上下解方法，构造新的上下解，得到了 ψ 在无穷远处的精确渐近行为。

定理 1 设 b 满足条件（b1）和条件（b2），g 满足条件（g1）～条件(g4)，则式（1）的唯一整体解 $\psi \in C^2(0, \infty)$ 满足：

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t)[K(t)]^{2/(q-1)} = \left\{\frac{2[(q-1)C_k + 2]}{c_0(q-1)^2}\right\}^{1/(q-1)}. \tag{4}$$

特别，当 $g(u) = u^q$；$b(t) = t^\sigma$，$\sigma > 0$ 时，

$$\psi(t) = \left[\frac{(2+\sigma)(q+\sigma+1)}{(q-1)^2}\right]^{1/(q-1)} t^{-(2+\sigma)/(q-1)} \tag{5}$$

是式（1）的精确解。

注 1：由条件（b1）可知：
$$\lim_{t\to\infty} K(t) = \infty \text{ 和 } C_k \in [0, 1]. \tag{6}$$

并且由条件（b2）可直接得到
$$\lim_{t\to\infty} \frac{K(t)k'(t)}{k^2(t)} = 1 - \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{K(t)}{k(t)}\right] = 1 - C_k. \tag{7}$$

注 2：满足条件（b1）和条件（b2）的一些基本例子如下：

1) $b \equiv C_0^2$，$k \equiv C_0 > 0$，$K(t) = C_0 t$，$C_k = 1$.

2) $b(t)=t^{\sigma}$, $k(t)=t^{\sigma/2}$, $\sigma>0$, $C_k=2/(2+\sigma)$.

3) $b(t)=[\ln(1+t)]^{2\sigma}$, $k(t)=[\ln(1+t)]^{\sigma}$, $\sigma>0$, $C_k=1$.

4) $b(t)=\mathrm{e}^{2t^{\sigma}}$, $k(t)=\mathrm{e}^{t^{\sigma}}$, $\sigma>0$, $C_k=0$.

5) $b(t)=\mathrm{e}^{2[\ln(1+t)]^{\sigma}}$, $k(t)=\mathrm{e}^{[\ln(1+t)]^{\sigma}}$, $\sigma>0$, $\sigma\neq 1$. 当$\sigma\in(0,1)$时, $C_k=1$; 而当$\sigma>1$时, $C_k=0$.

1 定理的证明

考虑摄动问题：$u''=b(t)g(u)$, $u(t)>0$, $t>T$, $u(T)=\psi(T)$, $u(\infty)=0$. (8)

这里，ψ是式（1）的唯一整体解，$T>0$.

定义 1 称 $\bar{u}\in C^2[T,\infty)$ 是式（1）的一个上解，如果 $\bar{u}$ 满足：

$$\bar{u}''\leqslant b(t)g(\bar{u}),\ \bar{u}(t)>0,\ t>T,\ \bar{u}(T)\geqslant\psi(T),\ \bar{u}(\infty)=0. \tag{9}$$

定义 2 称 $\underline{u}\in C^2[T,\infty)$ 是式（8）的一个下解，如果 $\underline{u}$ 满足：

$$\underline{u}''\geqslant b(t)g(\underline{u}),\ \underline{u}(t)>0,\ t>T,\ \underline{u}(T)\leqslant\psi(T),\ \underline{u}(\infty)=0. \tag{10}$$

引理 1 在定理 1 的假设条件下，存在 $T>0$ 和 $0<\varsigma_0<\lambda_0$，使得对任意 $\varsigma\in(0,\varsigma_0]$ 和 $\lambda\in[\lambda_0,\infty)$，$\bar{u}(t)=\lambda F(t)$ 和 $\underline{u}(t)=\varsigma F(t)$ 分别是式（8）的一个上解和一个下解，这里

$$F(t)=[K(t)]^{-2/(q-1)}. \tag{11}$$

而且
$$\underline{u}'(t)<0,\ \bar{u}'(t)<0,\ \underline{u}''(t)>0,\ \bar{u}''(t)>0,\ t\geqslant T. \tag{12}$$

证明：记
$$\Upsilon_0(t)=\frac{2}{q-1}\Big[\frac{q+1}{q-1}-\frac{k'(t)K(t)}{k^2(t)}\Big],\ t>0,$$
$$\Upsilon_1(t)=\frac{[F(t)]^q}{g[\xi F(t)]},\ t>0,\ \forall\,\xi>0.$$

由式（6），式（7）和条件（g4），得到
$$\lim_{t\to\infty}\Upsilon_0(t)=\theta_0:=\frac{22+C_k(q-1)}{(q-1)^2} \tag{13}$$

和
$$\lim_{t\to\infty}\Upsilon_1(t)=\frac{1}{c_0\xi^q}. \tag{14}$$

因而，对任意 $m\in(0,1)$, $M\in(1,\infty)$ 和 $\xi>0$, 存在 $T>0$, 使得

$$m\theta_0<\Upsilon_0(t)<M\theta_0,\ \forall\,t\geqslant T$$

和
$$\frac{m}{c_0\xi^q}<\Upsilon_1(t)<\frac{M}{c_0\xi^q},\ \forall\,t\geqslant T.$$

设 λ 和ς是满足下面条件的正常数

$$\lambda\geqslant\lambda_0:=\max\Big\{\psi(T)[K(T)]^{2/(q-1)},\ \Big(\frac{M^2\theta_0}{c_0}\Big)^{1/(q-1)}\Big\},$$
$$\varsigma\leqslant\varsigma_0:=\min\Big\{\psi(T)[K(T)]^{2/(q-1)},\ \Big(\frac{m^2\theta_0}{c_0}\Big)^{1/(q-1)}\Big\}.$$

令
$$\bar{u}(t)=\lambda F(t),\ t\geqslant T,\ \lambda\in[\lambda_0,\infty),$$
$$\underline{u}(t)=\varsigma F(t),\ t\geqslant T,\ \varsigma\in(0,\varsigma_0].$$

通过直接计算，得到

$$F'(t)=-\frac{2}{q-1}k(t)[K(t)]^{-(q+1)/(q-1)},$$
$$F''(t)=b(t)[K(t)]^{-2q/(q-1)}\Upsilon_0(t),\ t\geqslant T,$$

$$0 < \bar{u}'' = \lambda b(t) g(\bar{u}) \Upsilon_0(t) \Upsilon_1(t) \leqslant b(t) g(\bar{u}), \ t > T,$$
$$\bar{u}(T) \geqslant \psi(T), \ \bar{u}(\infty) = 0,$$
$$\underline{u}'' = \varsigma\, b(t) g(\underline{u}) \Upsilon_0(t) \Upsilon_1(t) \geqslant b(t) g(\underline{u}), \ t > T,$$
$$\underline{u}(T) \leqslant \psi(T), \ \underline{u}(\infty) = 0.$$

即 $\bar{u}$ 和 $\underline{u}$ 分别是式（8）的上下解，并且式（12）成立。

引理 2 在引理 1 中，对任意给定 $\varsigma \in (0, \varsigma_0]$ 和 $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$，

$$\varsigma F(t) \leqslant \psi(t) \leqslant \lambda F(t), \ \forall\, t \geqslant T.$$

证明：只需证 $\psi(t) \leqslant \lambda F(t)$，$\forall\, t \geqslant T$.

反证：假设存在 $t_0 > T$ 和 $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$，使得 $\psi(t_0) > \lambda F(t_0)$. 由于 ψ 和 F 在（$0, \infty$）是严格单调递减的，且 $\psi(T) \leqslant \lambda F(T)$，则存在 $t_1 \in [T, t_0)$，使得

$$\psi(t_1) = \lambda F(t_1), \ \psi(t) > \lambda F(t), \ \forall\, t > t_1.$$

再由 $\psi(\infty) = \lambda F(\infty) = 0$ 可得，存在 $t_2 \in (t_1, \infty)$，使得

$$\psi(t_2) - \lambda F(t_2) = \max_{t \in [t_1, \infty)} [\psi(t) - \lambda F(t)] > 0,$$

且 $\quad 0 \geqslant (\psi - \lambda F)''(t_2) \geqslant b(t_2)[g(\psi(t_2)) - g(\lambda F(t_2))] > 0.$ 矛盾。从而结论获证。

定理 1 的证明：考虑辅助函数 $\quad h(t) := \dfrac{\psi(t)}{F(t)}, \ t \in [T, \infty).$ （15）

由引理 2 可知，对任意给定 $\varsigma \in (0, \varsigma_0]$ 和 $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$，

$$\varsigma \leqslant h(t) \leqslant \lambda, \ \forall\, t \in [T, \infty).$$

因此， $\quad 0 < \varsigma \leqslant h_{\mathrm{L}} := \lim_{t\to\infty} \inf h(t) \leqslant h_{\mathrm{M}} : \lim_{t\to\infty} \sup h(t) \leqslant \lambda.$

断定 $\lim\limits_{t\to\infty} h(t)$ 存在。

反证：假设 $h_{\mathrm{L}} < h_{\mathrm{M}}$. 则存在两族数列 $\{t_n\}$，$\{s_n\}$，$n = 1, 2, \cdots$，使得

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} h(t_n) = h_{\mathrm{M}}, \ \lim_{n\to\infty} h(s_n) = h_{\mathrm{L}},$$

并且，对任意 $n \geqslant 1$， $\quad h'(t_n) = h'(s_n) = 0, \ h''(t_n) \leqslant 0, \ h''(s_n) \geqslant 0.$ （16）

由 $\psi''(t) = b(t) g(\psi(t))$ 和式（15）得到

$$h''(t) F(t) + 2h'(t) F'(t) + h(t) F''(t) = \psi''(t) = b(t) g(h(t) F(t)), \ t > T.$$

即
$$h''(t) \frac{F(t)}{F''(t)} + 2h'(t) \frac{F'(t)}{F''(t)} + h(t) = \frac{b(t) g(h(t) F(t))}{F''(t)}.$$

再由式（16），对任意的 $n \geqslant 1$，得到

$$h(t_n) \geqslant h''(t_n) \frac{F(t_n)}{F''(t_n)} + h(t_n) = \frac{b(t_n) g(h(t_n) F(t_n))}{F''(t_n)}, \tag{17}$$

$$h(s_n) \geqslant h''(s_n) \frac{F(s_n)}{F''(s_n)} + h(s_n) = \frac{b(s_n) g(h(s_n) F(s_n))}{F''(s_n)}. \tag{18}$$

在不等式（17）和式（18）中，令 $n \to \infty$，结合式（13）和式（14），得到

$$h_{\mathrm{M}} \geqslant \frac{c_0 h_{\mathrm{M}}^q}{\theta_0} \text{ 和 } h_{\mathrm{L}} \leqslant \frac{c_0 h_{\mathrm{L}}^q}{\theta_0},$$

从而
$$h_{\mathrm{L}} = h_{\mathrm{M}} = \left(\frac{\theta_0}{c_0}\right)^{1/(q-1)}.$$

这与假设 $h_L < h_M$ 矛盾。因此

$$h_0 := \lim_{t\to+\infty}\frac{\psi(t)}{F(t)} = \left\{\frac{2[2+C_k(q-1)]}{c_0(q-1)^2}\right\}^{1/(q-1)}. \tag{19}$$

式（4）得证，定理1证毕。

2 结论

文献[1]讨论了 ψ 在0处的渐近行为，本文应用摄动方法和上下解方法补充讨论了 ψ 在无穷远处的精确渐近行为，完善了式（1）唯一整体解的性质。

[参考文献] (References)

[1] CANO-CASANOVA S, LÓPEZ-GÓMEZ J. Existence, uniqueness and blow-up rate of large solutions for a canonical class of one-dimensional problems on the half-line[J]. Electronic J. Differential Equations, 2008, 244(12): 3180～3203.

[2] CÎRSTEA F C, RĂDULESCU V. Uniqueness of the blow-up boundary solution of logistic equations with absorbtion[J]. C. R. Math., 2002, 335(5): 447～452.

[3] CÎRSTEA F C, DU Y H. General uniqueness results and variation speed for blow-up solutions of elliptic equations[J]. Proc. London Math. Soc., 2005, 91(2): 459～482.

[4] GHERGU M, RADULESCU V. Singular elliptic problems: bifurcation and asymptotic analysis[M]. Oxford Univ. Press, 2008.

[5] ZHANG Z J. A remark on the existence of explosive solutions for a class of semilinear elliptic equations[J]. Nonlinear Analysis, 2000, 41(1): 143～148.

[6] ZHANG Z J. Boundary blow-up elliptic problems with nonlinear gradient terms[J]. Electronic J. Differential Equations, 2006, 228(2): 661～684.

[7] ZHANG Z J. A boundary blow-up for sub-linear elliptic problems with a nonlinear gradient term[J]. Electronic J. Differential Equations, 2006, 2006(64): 1～9.

[8] ZHANG Z J. Boundary blow-up for elliptic problems involving exponential nonlinearities with nonlinear gradient terms and singular weights[J]. Comm. Pure Appl. Anal., 2007, 6(2): 521～529.

[9] ZHANG Z J. Boundary blow-up elliptic problems of Bieberbach and Rademacher type with nonlinear gradient terms[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2007, 67(3): 727～734.