用到生成的 8 段线段上，则可得到 64 个小段。将这一过程无限进行下去，就得到了 Koch 类方波曲线。

上面的 8 个对于初始方向（x 轴正方向）的偏转角度，就称为特征角度。在文献[3]中，是把 $\pi/2$ 提出来，得到系数组（0，1，0，−1，−1，0，1，0），称为第 1 次生成的特征角序列。运用归纳的方法依次得到了第 2 次，第 3 次，直到第 n 次的特征角序列及其生成规律，并写出了特征角序列函数 H. 特征角序列函数的构造是将特征角度与二进位制连接在一起，运用二进位制的方法将原本复杂的结构变得有序，同时还具有普适性，即对于任意的一维曲线都可用构造特征角序列函数的方法写出其迭代函数。但是，文献[3]中的特征角序列函数 H 并不是通过严格的数学计算得到的，而只是作者归纳出来的满足条件的众多函数中的一个，所得的函数也不是简化的函数，所谓简化就是特征角序列函数 H 中只含有各个变量的单项式及其单项式的乘积，不含有其他项。

通过分析特征角序列函数 H 的条件，限定了特征角序列函数 H 所含的项，证明了文献[3]中的特征角序列函数 H 不是简化的函数。然后，运用待定系数法求出简化的特征角序列函数 H'.

1 化简特征角序列函数

在文献[3]中运用二进制展开法[4]将第 1 次生成的 8 段线段写成时间参数的方程：

$$F_1(z)=\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{2}\cdot H(c_1,c_2,c_3)}\cdot z+z_{i_1},\ i_1=(1,2,3,\cdots,2^3). \tag{1}$$

其中，$H(c_1,c_2,c_3)$，$c_1,c_2,c_3\in\{0,1\}$ 为二进制参数的函数，表示特征序列的值，即对于第 1 次生成是：

$$H(c_1,c_2,c_3)=\begin{cases}0, & n(0,0,0)=0;\\ 1, & n(0,0,1)=1;\\ 0, & n(0,1,0)=2;\\ -1, & n(0,1,1)=3;\\ -1, & n(1,0,0)=4;\\ 0, & n(1,0,1)=5;\\ 1, & n(1,1,0)=6;\\ 0, & n(1,1,1)=7.\end{cases} \tag{2}$$

其中，$n(c_1,c_2,c_3)=2^2c_1+2c_2+c_3$.

H 函数值和特征角序列值一一对应，所以式（2）可写为

$$\begin{cases}H(0,0,0)=0,\\ H(0,0,1)=1,\\ H(0,1,0)=0,\\ H(0,1,1)=-1,\\ H(1,0,0)=-1,\\ H(1,0,1)=0,\\ H(1,1,0)=1,\\ H(1,1,1)=0.\end{cases} \tag{3}$$

从而得到

$$H(c_1,c_2,c_3)=(c_1+c_3-2c_2)(c_3-c_1),\ c_1,c_2,c_3\in\{0,1\}. \tag{4}$$

因为 $c_i\in\{0,1\}$，$i=1,2,3$，即当 n 为不等于 0，1 的整数时，$c_i^n\equiv c_i$，所以式（4）可化简为：

$$
\begin{aligned}
H(c_1, c_2, c_3) &= (c_1 + c_3 - 2c_2)(c_3 - c_1) \\
&= -c_1^2 + c_3^2 - 2c_2c_3 + 2c_1c_2 \\
&= -c_1 + c_3 - 2c_2c_3 + 2c_1c_2 \\
&= (c_1 - c_3)(2c_2 - 1).
\end{aligned} \tag{5}
$$

可以验证上式仍然满足式（3）。

因为原来的特征角序列函数是归纳出的满足式（3）的函数，没有严格的数学推理过程，所以不够科学。下面就通过数学方法求出此简化函数，证明确实存在式（5）的简化特征角序列函数 H'.

2 Koch 类方波曲线的简化特征角序列函数

由上一部分可知：所求的简化特征角序列函数 H' 一定要满足条件式（3）。由 $H'(0, 0, 0) = 0$ 可知，简化特征角序列函数 H' 一定不含有常数项。又因 $c_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, 2, 3)$，所以，当 n 为不等于 0，1 的整数时，$c_i^n \equiv c_i$. 为了使求出的特征角序列函数为最简，用 c_i 代替 c_i^n，这样既简化了特征角序列函数，又满足了条件 $c_i \in \{0, 1\}$. 经过这样的替换就可以确定简化的特征角序列函数 H' 中不含有 $c_j^{n_1} c_k^{n_2} c_i^n$，其中，$i, j, k \in \{1, 2, 3\}$，$n_1$，$n_2$ 为整数，n 为不等于 0，1 的整数。

综上所述，简化的特征角序列函数 H' 中所含的项只能为 $c_1c_2c_3$，c_1c_2，c_1c_3，c_2c_3，c_1，c_2，c_3 共 7 项。设

$$
H'(c_1, c_2, c_3) = a_1c_1c_2c_3 + a_2c_1c_2 + a_3c_2c_3 + a_4c_1c_3 + a_5c_1 + a_6c_2 + a_7c_3. \tag{6}
$$

其中，$a_i (i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\})$ 为待定系数。将式（3）代入式（6），得

$$
\begin{cases}
a_7 = 1, \\
a_6 = 0, \\
a_3 + a_6 + a_7 = -1, \\
a_5 = -1, \\
a_4 + a_5 + a_7 = 0, \\
a_2 + a_5 + a_6 = 1, \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 0.
\end{cases}
$$

解上式，得到唯一解：

$$
H'(c_1, c_2, c_3) = -c_1 + c_3 - 2c_2c_3 + 2c_1c_2 = (c_1 - c_3)(2c_2 - 1). \tag{7}
$$

比较式（5）和式（7），发现二者结果一样。式（5）是原来归纳出的特征角序列函数 H 的化简式，而式（7）是经过严格的数学推理计算得出，所以说存在唯一简化的特征角序列函数 H'.

同理，第 2 次生成了 $8^2 = 2^{3\times2}$ 段分段线段（如图 2a 所示），有 6 个参数，则对应的简化特征角序列函数 H' 为：$H'(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) = (c_1 - c_3)(2c_2 - 1) + (c_4 - c_6)(2c_5 - 1)$. 第 3 次生成了 $8^3 = 2^{3\times3}$ 段分段线段（如图 2b 所示），有 9 个参数，则对应的简化特征角序列函数 H' 为：

$$
H'(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9) = (c_1 - c_3)(2c_2 - 1) + (c_4 - c_6)(2c_5 - 1) + (c_7 - c_9)(2c_8 - 1).
$$

第 n 次生成了 $8^n = 2^{3\times n}$ 段分段线段，有 $3n$ 个参数，简化的特征角序列函数 H' 为

$$
H'(c_1, c_2, c_3, \cdots, c_{3n}) = \sum_{k=0}^{n-1} (c_{3k+1} - c_{3k+3})(2c_{3k+2} - 1).
$$

求出了简化的特征角序列函数 H'，类似文献[3]的方法，就可以求出 Koch 类方波曲线的解析表达式。

用同样的办法可以求出生成元为 4 段线段的 Koch 曲线第 n 次迭代时的简化特征角序列函数 H' 为：

$$H'(c_1, c_2, \cdots, c_{2n}) = \sum_{k=0}^{n-1}(c_{2k+2} - c_{2k+1}).$$

可以验证上式与文献[5]的结果相同。

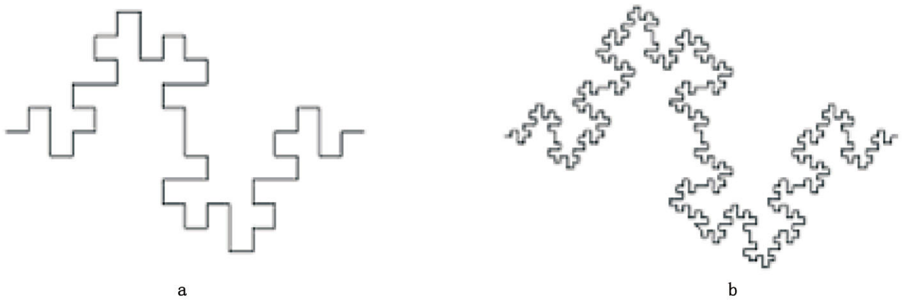

图 2　第 2 次与第 3 次迭代的生成曲线
Fig. 2　The generating curve of the 2nd and the 3rd time iteration
a—第 2 次迭代；b—第 3 次迭代
a-The 2nd time iteration；b-The 3rd time iteration

3　结论

对于生成元为 8 段的 Koch 类方波曲线，运用数学中的待定系数法求出了第 1 次生成曲线时的简化的特征角序列函数 H'，利用同样的办法，归纳出了第 2 次，第 3 次，直到第 n 次生成曲线时的简化的特征角序列函数。对于生成元为 4 段线段的 Koch 曲线也用同样的方法求其简化的特征角序列函数。从而得出结论：当生成元为 2^n（n=2，3，…）段线段时，都可以用二进位表示，并用待定系数法求出简化的特征角序列函数。这样就更容易求出曲线的解析表达式。对于此方法是否能够用来研究更为复杂的严格自相似[6]的规则分形曲线，例如生成元为非 2^n 段的 Koch 类曲线，还需要进一步研究。

致谢

衷心感谢云南大学物理科学技术学院非线性复杂系统中心彭守礼教授和曹克非教授的耐心指导，感谢北京工业大学机械工程与应用电子技术学院高发宝的热心帮助。

[参考文献] (References)

[1]　MANDELBROT B B. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension[J]. Science，1967，156：636～638.
[2]　MANDELBROT B B. The fractal geometry of nature[M]. San Francisco：Freeman，1982.
[3]　曾峰. Koch 类方波曲线的解析表达式[D]. 昆明：云南大学，2006.
ZENG F. The square Koch-like curve's analytic expression[D]. Kunming：Yunnan University，2006. (in Chinese)
[4]　杨光俊. 分形的数学（上册)[Z]. 昆明：云南大学数学系，2002.
YANG G J. Fractal mathematics (Vol. 1)[Z]. Kunming：Department of Mathematics，Yunnan University，2002. (in Chinese)
[5]　杨晓玲，黄雪梅. Koch 曲线的级数展开式[J]. 应用数学学报，2002，25（3)：527～537.
YANG X L，HUANG X M. Series expansion for the koch curve[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，2002，25(3)：527～537. (in Chinese)
[6]　HUTCHINSON J E. Fractals and self similarity[J]. Indiana Univ. Math. J.，1981，30：713～747.