所得结果推广了文献[5]～[6]已有的随机模型的结论，具有一定的现实意义。

1 含捕获费用的最优捕获模型

给定一个满足一般条件的过滤概率空间 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geqslant 0}, P)$. 在不干涉的前提下，假设 t 时刻，相互影响的种群大小或密度 $X_i(t)$，$1\leqslant i\leqslant n$，是以下 n 个随机微分方程的强解：

$$\mathrm{d}X_i(t) = r_i X_i(t)\left\{\left[1-\left(\frac{X_i(t)}{k_i}\right)^{\theta_i}+\sum_{j\neq i}^{n}\frac{a_{ij}}{k_j}X_j(t)^{\theta_j}\right]\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma_{ij}}{k_j}X_j(t)^{\theta_j}\,\mathrm{d}\omega(t)\right\},\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1}$$

$$X_i(0) = x_i \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

其中，$\omega\in\Omega$ 为 Brownian 运动，且 $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t))$，$T = T(\omega) = \inf\{t>0;\ (t, X(t))\notin S\}$. 这里的 $S\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是一个给定的 Borel 集。可视 S 为种群存活集，视 T 为种群灭绝时间。如果对这 n 个种群进行捕获，那么随机捕获策略为 $h(t,\omega) = (h_1(t,\omega), h_2(t,\omega), \cdots, h_n(t,\omega))$，其中 $t\geqslant 0$，$\omega\in\Omega$，且满足以下条件：

1) 对应于 ω 产生的 σ—代数 $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$，$h(t)$ 是可测的，即 $\{h(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是可适的；

2) 对于几乎所有的 ω，分量 $h_i(t,\omega)$ 随 t 的变化不减（$1\leqslant i\leqslant n$）；

3) 对于几乎所有的 ω，函数 $h(t,\omega)$ 是 t 的右连续函数；

4) 对于几乎所有的 ω，初始量 $h(0,\omega) = 0$.

$h(t,\omega)$ 的分量 $h_i(t,\omega)$ 表示从初始时刻 0 开始，到 t 时刻，从种群 i 中捕获累积的总量。

如果采用捕获策略 $h(t,\omega)$，那么相应的种群向量 $X^h(t) = (X_1^h(t), \cdots, X_n^h(t))^{\mathrm{T}}$ 满足方程组：

$$\mathrm{d}X_i^{h_i}(t) = r_i X_i^{h_i}(t)\left\{\left[1-\left(\frac{X_i^{h_i}(t)}{k_i}\right)^{\theta_i}+\sum_{j\neq i}^{n}\frac{a_{ij}}{k_j}X_j^{h_j}(t)^{\theta_j}\right]\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma_{ij}}{k_j}X_j^{h_j}(t)^{\theta_j}\,\mathrm{d}\omega(t)\right\}-\mathrm{d}h_i(t,\omega), \tag{3}$$

$$X_i^{h_i}(0) = x_i > 0, \tag{4}$$

其中，$0\leqslant t\leqslant T$，$1\leqslant i\leqslant n$.

如果贴现指数为 ρ，那么从 0 时刻开始的贴现总收获利润的期望可以表示为

$$J^h(x) = E_x\left[\int_{0^-}^{T}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-\rho t}(\lambda_i\mathrm{d}h_i(t) - c_i(X_i^{h_i}(t))\mathrm{d}t)\right], \tag{5}$$

其中，E_x 为 $(X^h(t))_{t\geqslant 0}$ 遵循概率法则 P_x 的期望；λ_i 为收获的单价；$c_i(\cdot)$ 为捕获费用，是非负函数，而且关于 $X_i^{h_i}(t)$ 二次连续可导，并满足

$$E_x\left[\int_0^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-\rho t}c_i(X_i^{h_i}(t))\mathrm{d}t\right]<\infty, \tag{6}$$

且对于 $x>0$，有

$$c_i''(x_i)\geqslant -2r_i\lambda_i, \tag{7}$$

这就引出了以下问题，寻找函数 $\Phi(x)$ 和最优捕获策略 $h^*\in H$，使得

$$\Phi(x) = \sup_{h\in H}J^h(x) = J^{h^*}(x). \tag{8}$$

2 定理证明

做如下约定：$0\leqslant t_1<t_2<\cdots$ 为策略 $h\in H$ 的跳跃时间，$\Delta h(t_k) = h(t_k)-h(t_k^-)$ 为 $h(t)$ 在 $t=t_k$ 处的跳跃点，$h^c(t) := h(t)-\sum_{0\leqslant t_k\leqslant t}\Delta h(t_k)$ 为 $h(t)$ 的连续部分。

定理 1 假设 $\phi\geqslant 0$ 是 $\bar{S}$ 上的连续函数，在 S^0 上二次连续可微，并满足以下条件：

在 S^0 上，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\geqslant\lambda_i,\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{9}$$

$$L\phi(t,x):=\sum_{i=1}^{n}r_ix_i\Big[1-\Big(\frac{x_i}{k_i}\Big)^{\theta_i}+\sum_{j\neq i}^{n}\frac{a_{ij}}{k_j}x_j(t)^{\theta_j}\Big]\frac{\partial\phi}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\frac{r_i}{k_i}x_ix_j^{\theta_j}\Big)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}-\rho\phi(x)\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i(x), \tag{10}$$

那么，在 S 上有：

$$\phi(x)\geqslant\Phi(x). \tag{11}$$

定理 2 定义非干扰区域：$D=\Big\{(t,x)\in S^0,\ t>0\ 且\ \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t,x)>\lambda_i,\ i=1,2,\cdots,n\Big\}$，

假设在 D 中

$$L\phi=\sum_{i=1}^{n}c_i(x), \tag{12}$$

且存在一个捕获策略 $\hat{h}$ 满足以下条件：

$$(t,X^{\hat{h}}(t))\in\bar{D},\quad\forall t>0, \tag{13}$$

$$\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t,X^{\hat{h}}(t))-\lambda_i\Big)\mathrm{d}\hat{h}_i^c(t)=0,\quad\forall i=1,2,\cdots,n, \tag{14}$$

即当且仅当 $\frac{\partial\phi}{\partial x_i}=\lambda_i$ 时，$\hat{h}_i^c$ 增大。

在 $\hat{h}(t_k)$ 的所有跳跃时间 $t_k\geqslant 0$ 处：

$$\Delta\phi(t_k):=\phi(t_k,X^{\hat{h}}(t_k))-\phi(t_k,X^{\hat{h}}(t_k^-))=-\lambda(t_k)\cdot\Delta\hat{h}(t_k), \tag{15}$$

且当 $R\rightarrow\infty$ 时，

$$E_x[\phi(T_R,X^{\hat{h}}(T_R))]\rightarrow 0, \tag{16}$$

其中，$T_R=T\wedge R\wedge\inf\{t>0;|X^h(t)|\geqslant R\}$，那么，$\phi(0,x)=\Phi(0,x)$，$\forall(0,x)\in S$. 且 $h^*:=\hat{h}$ 是一个最优捕获策略。

证明：选取一个瞬时捕获策略 $h\in H$，假设 $\phi\in C^2(R)$，且 $\phi>0$，并满足方程（9）和方程（10）。根据关于鞅的 Itô 公式，由方程组（3）可得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\rho T_R}\phi(T_R,X^h(T_R))=&\ \phi(0,X^h(0))+\mathrm{e}^{-\rho T_R}\int_{0^-}^{T_R}\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,X^h(t))\mathrm{d}t+\\&\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-\rho T_R}\int_{0^-}^{T_R}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t,X^h(t^-))\mathrm{d}X_i^h(T)+\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{e}^{-\rho T_R}\int_{0^-}^{T_R}\frac{1}{2}\Big(\frac{r_i}{k_i}x_ix_j^{\theta_j}\Big)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}(t,X^h(t))\mathrm{d}t+\\&\sum_{0<t\leqslant T_R}\mathrm{e}^{-\rho T_R}\Big\{\phi(t_k,X^h(t_k))-\phi(t_k,X^h(t_k^-))-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t,X^h(t_k^-))\Delta X_i^h(t_k)\Big\}.\end{aligned}$$

利用方程（10）可得

$$\begin{aligned}E_x[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\phi(T_R,X^h(T_R))]=&\ \phi(0,X^h(0))+E_x\Big[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\int_{0^-}^{T_R}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,X^h(t))\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t,X^h(t^-))\mathrm{d}X_i^h(t)\Big)\Big]+\\&E_x\Big[\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{e}^{-\rho T_R}\int_{0^-}^{T_R}\frac{1}{2}\Big(\frac{r_i}{k_i}x_ix_j^{\theta_j}\Big)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}(t,X^h(t))\mathrm{d}t\Big]+\\&E_x\Big[\sum_{0<t\leqslant T_R}\mathrm{e}^{-\rho T_R}\Big\{\phi(t_k,X^h(t_k))-\phi(t_k,X^h(t_k^-))-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t,X^h(t_k^-))\Delta X_i^h(t_k)\Big\}\Big]\\=&\ \phi(0,X^h(0))+E_x\Big[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\Big\{\int_{0_-}^{T_R}L\phi(t,X^h(t))\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t,X^h(t^-))\cdot\mathrm{d}h_i(t)\Big\}\Big]+\end{aligned}$$

$$E_x\Big[\sum_{0<t\leqslant T_R}\mathrm{e}^{-\rho T_R}\Big\{\phi(t_k,X^h(t_k))-\phi(t_k,X^h(t_k^-))+\sum_{i=1}^n\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t,X^h(t_k^-))\Delta X_i^h(t_k)\Big\}\Big]$$
$$\leqslant\phi(0,x)+E_x\Big[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\Big\{\int_{0^-}^{T_R}L\phi(t,X^h(t))\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^n\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t,X^h(t^-))\cdot\mathrm{d}h_i(t)\Big\}\Big]+$$
$$E_x\Big[\sum_{0<t\leqslant T_R}\mathrm{e}^{-\rho T_R}\Big\{\Delta\phi(t_k,X^h(t_k))+\sum_{i=1}^n\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t,X^h(t_k^-))\Delta X_i^h(t_k)\Big\}\Big]-$$
$$E_x\Big[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\sum_{i=1}^n\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(0,x)\Delta h_i(0)\Big],$$

其中，$\Delta\phi(t_k,X^h(t_k))=\phi(t_k,X^h(t_k))-\phi(t_k,X^h(t_k^-))$，$t_k\geqslant 0$.

令 $h^c(t)$ 表示 $h(t)$ 的连续部分，即：$h^c(t)=h(t)-\sum_{0\leqslant t_k\leqslant t}\Delta h(t_k)$，可得

$$E_x[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\phi(T_R,X^h(T_R))]\leqslant\phi(x)+E_x\Big[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\Big\{\int_{0^-}^{T_R}\Big(\sum_{i=1}^n c_i(X^h(t))\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^n\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\mathrm{d}h_i^c\Big)+\sum_{0\leqslant t_k\leqslant T_R}\Delta\phi(t_k,X^h(t_k))\Big\}\Big].$$

根据均值得性质，对于点 $X^h(t_k^-)$ 和 $X^h(t_k)$ 连线上的某些点 $\hat{X}^h(t_k)$ 有

$$\Delta\phi(t_k,X^h(t_k))=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t_k,\hat{X}^h(t_k))\Delta X_i^h(t_k)=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t_k,\hat{X}^h(t_k))\Delta h_i(t_k).$$

所以，

$$E_x[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\phi(T_R,X^h(T_R))]\leqslant\phi(x)+E_x\Big[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\int_{0^-}^{T_R}\Big(\sum_{i=1}^n c_i(X^h(t))\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^n\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\mathrm{d}h_i^c\Big)\Big]+$$
$$E_x\Big[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\sum_{0\leqslant t_k\leqslant T_R}\sum_{i=1}^n\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t_k,\hat{X}^h(t_k))\Delta h_i(t_k)\Big].$$

所以由条件（9）可得

$$\phi(x)\geqslant E_x\Big[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\int_{0^-}^{T_R}\Big(\sum_{i=1}^n\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\mathrm{d}h_i^c-\sum_{i=1}^n c_i(X^h(t))\mathrm{d}t\Big)\Big]+E_x\Big[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\sum_{0\leqslant t_k\leqslant T_R}\sum_{i=1}^n\lambda_i(t_k)\Delta h_i(t_k)\Big]+E_x[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\phi(T_R,X^h(T_R))]$$
$$\geqslant E_x\Big[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\int_0^{T_R}\Big(\sum_{i=1}^n\lambda_i\mathrm{d}h_i(t_k)-\sum_{i=1}^n c_i(X^h(t))\mathrm{d}t\Big)\Big]+E_x[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\phi(T_R,X^h(T_R))].\tag{17}$$

因为 $R<\infty$和 $h\in H$ 是瞬时的，且 $\phi\geqslant 0$，这就证明式（11）成立，即 $\phi(x)\geqslant\Phi(x)$.

证明：假设 D 是定理里所定义的，且满足式（12）～式（15）。把 $\hat{h}$ 取代以上结论中的每一个 h，直到式（17）。所以，

$$\phi(x)=E_x\Big[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\int_0^{T_R}\Big(\sum_{i=1}^n\lambda_i\mathrm{d}\hat{h}_i-\sum_{i=1}^n c_i(X^{\hat{h}}(t))\mathrm{d}t\Big)\Big]+E_x[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\phi(T_R,X^{\hat{h}}(T_R))],$$

令 $R\to\infty$，利用式（16）可得最优捕获：

$$\phi(x)=E_x\Big[\mathrm{e}^{-\rho T_R}\int_0^{T_R}\Big(\sum_{i=1}^n\lambda_i\mathrm{d}\hat{h}_i-\sum_{i=1}^n c_i(X^{\hat{h}}(t))\mathrm{d}t\Big)\Big],$$

将此结论与式（11）结合，可以得到 $\phi(x)=\Phi(x)$，且 $\hat{h}$ 是最优策略。

显然，在固定的成本价格体系中，以优化持续利润为目标将会起到保护生物种群的作用，而不会刺激人们对资源进行掠夺式开发。

3 结论

文献[5]～[6]都是针对服从随机运动的种群进行捕获，寻求最优捕获策略。不同的是，文献[5]是对一个种群进行捕获，考虑捕获费用；而文献[6]是对 n 个种群进行捕获，但没有考虑捕获费用。在这2篇文献的基础上，文章研究了对 n 个服从随机 Brownian 运动的种群进行捕获，考虑捕获费用，得到一个最优的捕获策略。因此，所得结果推广了文献[5]～[6]已有的结论，更具有现实意义。

[参考文献] (References)

[1] 柏灵，李晓月，杨帆，等. 捕食—食饵系统的两种群同时捕获的最优化问题[J]. 东北师大学报（自然科学版），2001，33（1）：1～5.
BAI L，LI X Y，YANG F，et al. Optimal problem of two species being harvested simultaneously for prey- predator systems[J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Science)，2001，33(1)：1～5. (in Chinese)

[2] 张玉娟，刘会民，张树文，等. 竞争系统的两个种群同时进行捕获的优化问题[J]. 生物数学学报，1998，13（4）：456～461.
ZHANG Y J，LIU H M，ZHANG S W，et al. Optimal problem of two species being harvested for competing systems[J]. Journal of Biomathematics，1998，13(4)：456～461. (in Chinese)

[3] 程亚焕，张剑，李冬梅. 一类互惠系统的两种群同时捕获的最优化问题[J]. 通化师范学院学报，2004，25（4）：19～21.
CHENG Y H，ZHANG J，LI D M. Optimal problem of two species being harvested simultaneously for cooperative systems[J]. Journal of Tonghua Teachers College，2004，25(4)：19～21. (in Chinese)

[4] LIAN B S，HU S G. Asymptotic behaviour of the stochastic Gilpin-Ayala competition models[J]. Mathematical Analysis and Applications，2008，339(1)：419～428.

[5] YUAN J H，LIU K H. Harvesting from a population in a stochastic crowded environment with harvesting cost[A]. The First International Symposium on Optimization and Systems Biology[C]. Beijing：OSB'07，2007. 459～467.

[6] LUNGU E. Optimal harvesting from interacting populations in a stochastic environment[J]. Bernoulli，2001，7(3)：527～539.