设 A 为物资需求点；A_1，A_2，…，A_m 为 m 个可提供物资的供应点；S 为物资需求量；A_i 的最大物资供应量为 $a_i(a_i>0)$，$i=1$，2，…，m. A_i 的单次最大运力限额为 $\delta_i(\delta_i>0)$；物资从 A_i 运到 A 需要的时间为 $t_i(t_i>0)$；供应量为 x_i；损失率为 q_i；成功运达的概率为 p_i；$n_i=0$，1（0 表示不由 A_i 供应点供货，1 表示由 A_i 供应点供货）. 决策方案可表示为：运输的决策方案[3]就是确定物资供应点及各提供的物资量，因而任一方案 B 可用集合的形式表示：

$$B=\{(A_1,x_1);(A_2,x_2);\cdots;(A_m,x_m)\},$$
$$0\leqslant x_i\leqslant a_i \text{ 且 } 0\leqslant x_i\leqslant \delta_i. \tag{1}$$

1）时间

按照方案 B 最后物资到达时间为最终交货时间，用 $T(B)$ 表示方案 B 的最终交货时间，则

$$T(B)=\max t_i,\ i=1,2,\cdots,m. \tag{2}$$

2）损失度

每批货物的损失度[4]是指在运输过程中每批货物的损失程度，用 $Q_d(B)$ 表示，则

$$Q_d(B)=\max Q_i,\ i=1,2,\cdots,m. \tag{3}$$

总损失度是指按照方案 B，完成物资运输后整个运输过程中的损失程度，用 $Q_t(B)$ 表示，则

$$Q_t(B)=\frac{\sum_{i=1}^{m} q_i\cdot n_i\cdot x_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i}. \tag{4}$$

3）涉及的供应点数

方案 B 所涉及的供应点数可表示为 $N(B)=\sum_{i=1}^{m} n_i$.

4）运达概率

按照方案 B，物资能够运达的概率用 $P(B)$ 表示，则

$$P(B)=\prod_{i=1}^{N(B)} p_i,\ i=1,2,\cdots,m.$$

其中，p_i 为供应点成功将物资运达需求点的概率。

2 模型的建立

综上所述，模型的层次关系为

1）运输时间有限；

2）每批货物运输的损失度小于规定的上限；

3）涉及的供应点数最少；

4）成功运达的可能性高于规定的概率。

抽象成数学模型如下：

目标函数为

$$\min N(B)=\min\sum_{i=1}^{m} n_i, \tag{5}$$

其中，约束条件为

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}(1-Q_i)\cdot x_i\cdot n_i = S;\\ T(B)\leqslant T;\\ P(B)\geqslant P;\\ Q_{\mathrm{d}}(B)\leqslant Q_{\mathrm{d}};\\ n_i=0,1;\ i=1,2,\cdots,m.\end{cases}$$

3 模型求法分析

在单货种单需求点的情况下，由于有运力限制，则供应点提供的物资数量既需满足 $0\leqslant x_i\leqslant a_i$，还需要同时满足 $0\leqslant x_i\leqslant\delta_i$. 若取 $c_i=\min(a_i,\delta_i)$，上述2个约束条件就可转化为 $0\leqslant x_i\leqslant c_i$. 由于对任一方案 B，$T(B)$，$Q_{\mathrm{d}}(B)$ 的取值不能大于所要求限定值 T，Q_{d}，根据这点剔除不满足条件的点。则模型转化为

1）目标函数，

$$\min N(B)=\min\sum_{i=1}^{m}n_i, \tag{6}$$

其中，约束条件为

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}(1-Q_i)\cdot c_i\cdot n_i\geqslant S;\\ P(B)\leqslant P;\\ n_i=0,1;\ i=1,2,\cdots,m。\end{cases}$$

在 Matlab 优化工具箱中由于线性规划的函数 linprog 不适应于求解 0－1 整数规划[5]，所以编写 0－1整数规划函数 linprog01.m 求解。其程序代码如下所示：

```
Function [x, fval]=linprog01(c, A, b, Aeq, beq)
iVal=size(c, 1);
xVal=zeros(size(c));
x=xVal;
 opt_solution=c' * xVal;
for i=1:2^iVal-1
    strBin_i=dec2bin(i);
    xVal=zeros(size(c));
    for k=1:length(strBin_i)
        xVal(k)=str2num(strBin_i(k));
    end
        constrA=A * xVal<=b;
        constrAeq=Aeq * xVal==beq;
        if all(constrA) & all(constrAeq)
          objVal=c' * xVal;
              if objVal>=opt_solution
                opt_solution=objVal;
                x=xVal;
```

```
            end
        end
    end
    fval=opt_solution;
```

2）利用 1）中所求得的 n_i，有

$$\min Q_t = \min \frac{\sum_{i=1}^{m} Q_i \cdot n_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i}; \tag{7}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}(1-Q_i) \cdot x_i \cdot n_i = S, \\ 0 \leqslant x_i \leqslant c_i. \end{cases}$$

再根据总损失度最小确定 x_i，调用 Matlab 优化工具箱 fmincon 函数求解非线性约束最优化问题，最终求得 x_i.

4 算例求解

例：已知某地对某种货物的物资需求量 $S=25$ t；最晚运达时间 $T=6$ d；运达概率最小 $P=0.75$；每批货物的最大损失度 $Q_d=0.05$. 各供应点状况如表 1 所示。

表 1 各供应点状况一览表

Tab. 1 List of each supply depot state

参数	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
t_i	1	2	3	5	5	6	7	8	9	1
a_i	3	9	12	12	11	15	17	12	24	1
δ_i	5	8	12	11	9	16	15	8	22	2
P_i	0.70	0.96	0.90	0.94	0.950	0.92	0.96	0.68	0.58	0.78
Q_i	0.11	0.02	0.03	0.05	0.005	0.01	0.01	0.04	0.02	0.01

注：资料来源于参考文献[2]

根据例题中的已知条件并结合模型的求法分析，由 $T(B)=\max t_i \leqslant T$ 和 $Q_d(B)=\max Q_i \leqslant Q_d$，先剔除不符合条件的供应点 A7，A8，A9 和 A10. 计算列表如表 2 所示。

表 2 计算列表

Tab. 2 List of computation

供应点参数	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
t_i	1	2	3	5	5	6	7	8	9	1
$t_i \leqslant 6$	1	2	3	5	5	6				
a_i	3	9	12	12	11	15	17	12	24	1
δ_i	5	8	12	11	9	16	15	8	22	2
$c_i = \min(a_i, \delta_i)$	3	8	12	11	9	15	15	8	22	1
p_i	0.80	0.96	0.90	0.94	0.950	0.92	0.96	0.68	0.58	0.78
$p_i \geqslant 0.75$	0.80	0.96	0.90	0.94	0.950	0.92				
Q_i	0.11	0.02	0.03	0.05	0.005	0.01	0.01	0.04	0.02	0.01
$1-Q_i$	0.89	0.98	0.97	0.95	0.995	0.99	0.99	0.96	0.98	0.99
$c_i(1-Q_i)$	2.67	7.84	11.64	10.45	8.955	14.85	14.85	7.68	21.56	0.99

通过在 Matlab 中编写的 0－1 整数规划的函数 linprog01.m，得 $n=[0, 0, 1, 0, 0, 1]$和 $N(B)=2$，得选取的供应点是 $B=\{A3, A6\}$，再验证成功送达率 $P(B)=0.8280$ 满足 $P(B)\geqslant 0.75$，最后调用 Matlab 优化工具箱中的非线性约束最优化函数——fmincon 函数[6]求得 $x=[10.4639$, 15.000 0]，$Q_t(B)$=0.018 2，得最优解为 B={(A3，10.463 9)，(A6，15.000 0)}，即由供应点 A3，A6 为该地供应货物，供应量分别为 10.463 9 t 和 15.000 0 t.

5 结论

建立了求解一类运输优化问题的模型，分析了模型解法，验证了用 Matlab 求解一类运输优化问题的有效性，得到了单货种单需求点的运输问题在满足供应点最少、运达概率最大和损失率最低的最优解。为多需求点情况下优化模型的建立和求解打下了基础。

[参考文献] (References)

[1] 冯耕中. 现代物流与供应链管理[M]. 西安：西安交通大学出版社，2004.
FENG G Z. Modern logistics and supply chain management[M]. Xi'an：Xi'an Jiaotong University Press，2004. (in Chinese)

[2] 黄达,王航宇. 一类运输优化问题求解过程分析[J]. 舰船电子工程，2007，159 (3)：133～135.
HUANG D，WANG H Y. Analysis of a solution to a kind of transport optimization question[J]. Ship Electronic Engineering，2007，159(3)：133～135. (in Chinese)

[3] 钱颂迪. 运筹学[M]. 北京：清华大学出版社，1991.
QIAN S D. Operation research[M]. Beijing：Tsinghua University Press，1991. (in Chinese)

[4] 刘徽. 运输问题的新算法[D]. 成都：四川大学，2005.
LIU H. New algorithm of the transportation problem[D]. Chengdu：Sichuan University，2005. (in Chinese)

[5] 王维强. 优化技术在交通运输企业中的应用[J]. 汽车科技，2007 (2)：45～47.
WANG W Q. The optimization technology's actually used in traffic enterprise[J]. Automobile Science and Technology，2007 (2)：45～47. (in Chinese)

[6] 飞思科技产品研发中心. Matlab 6.5 辅助优化计算与设计[M]. 北京：电子工业出版社，2006.
Feisi Synopsys R & D Center. Aided optimization computation and design of Matlab 6.5[M]. Beijing：Publishing House of Electronics Industry，2006. (in Chinese)