第4卷 第1期
2011年 1月
highlights.paper.edu.cn
中国科技论文在线精品论文
Highlights of Sciencepaper Online
Vol.4 NO.1
January 2011

无穷小的阶对于 0^0 不定型极限的影响

龚谊承[1,2]，李寿贵[1,2]

（1. 武汉科技大学理学院，武汉 430065；
2. 武汉科技大学冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室，武汉 430081）

摘要：从无穷小的阶的角度探讨影响 0^0 不定型极限的原因。通过比较底数和指数作为无穷小的阶的高低，提出并证明 2 个定理：当底数和指数是同阶无穷小时结果确定为 1；当底数是指数的低阶无穷小时结果也确定为 1. 另外，通过实例演示定理的应用，说明当底数是指数的高阶无穷小时结果不确定。

关键词：基础数学；极限；无穷小；阶；不确定性
中图分类号：O172.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1674-2850(2011)01-0001-3

Influence of infinitesimals' order on limit of exponent function with both base and exponent being infinitesimals

GONG Yicheng[1,2], LI Shougui[1,2]

(1. *College of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan* 430065, *China*;
2. *Hubei Province Key Laboratory of Systems Science in Metallurgical Process, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan* 430081, *China*)

Abstract: This paper discusses the reasons why the limit is indefinite when the base and exponent are both infinitesimals. By comparing the order of the infinitesimal base and infinitesimal exponent, two theorems are put forward and proved and then illustrated. When the base is of the same order as the exponent, $\lim u(x)^{v(x)}$ is definitely 1, and so when the base is of the lower order than the exponent. Finally some examples are given to illustrate that $\lim u(x)^{v(x)}$ is indefinite when the base is of the higher order than the exponent.

Key words: fundamental mathematics; limit; infinitesimal; order; indefiniteness

0 引言

由于变化的多样性，无穷小量成为了高等数学当之无愧的主角，以致微积分也被称为无穷小分析。微积分自创立以来，已有 300 多年的历史，但其魅力不减，相关研究也依然未尽。关于 0^0 的极限研究就是话题之一，此处的 0^0 指 $\lim u(x)^{v(x)}$，其中 $\lim u(x)=0$ 且 $\lim v(x)=0$. 文献[1]～[4]都指出：0^0 是一种结果不确定的类型，可以通过某种特定的技巧转化进而利用洛必达法则解决。但对于影响 0^0 最后结果的原因却至今未得到国内外学者的探讨。仅有的相关文献也很少。文献[5]着眼于 0^0 结果的不确定性，对教材内容给出了调整例题或习题的一些建议，文献[6]关注无穷小阶的比较方法及其稠密性。而这里重在探讨无穷小阶对于 0^0 结果的影响：通过比较底数和指数作为无穷小的阶，证明只有当底数是比指数更高阶的无穷小时，结果才是不确定的，对计算极限有着方向的指导作用且提供了有价值的参考。

1 无穷小阶的比较对结果的影响

如果 $\lim u(x)=0$ 并且 $\lim v(x)=0$，那么 $\lim u(x)^{v(x)}$ 何时是 1，何时不是 1 呢？经过仔细比较和思

基金项目：科技部重大教研项目子课题（2009IM010400-1-25）；湖北省教育厅教研项目（2008182）
作者简介：龚谊承（1975—），女，副教授，主要研究方向：数学教育与系统工程. E-mail：gyc4298@163.com

考分析，笔者发现问题的关键在于底数 $u(x)$ 和指数 $v(x)$ 作为无穷小量的阶的关系。

1.1 当底数和指数为同阶时，0^0 确定为 1

定理 1 假设在某一个过程下有 $\lim u(x)=0$ 且 $\lim v(x)=0$，则如果 $\lim\dfrac{u(x)}{v(x)}=c\neq 0$，且 $\lim\dfrac{u'(x)}{v'(x)}=a$，则必有 $\lim u(x)^{v(x)}=1$.

证明：首先，简单变形知 $\lim u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim[v(x)\cdot\ln u(x)]}$，

又因为 $\lim[v(x)\cdot\ln u(x)]=\lim\left[\dfrac{\ln u(x)}{\dfrac{1}{v(x)}}\right]=\lim\left\{\dfrac{u'(x)}{u(x)}\times\left[-\dfrac{v^2(x)}{v'(x)}\right]\right\}$

$$=\lim\left\{\frac{u'(x)}{v'(x)}\times\left[-\frac{v(x)}{u(x)}\right]\times v(x)\right\}=-\lim\frac{u'(x)}{v'(x)}\cdot\lim\frac{v(x)}{u(x)}\cdot\lim v(x),$$

因为 $\lim\dfrac{u(x)}{v(x)}=c\neq 0$，并且 $\lim\dfrac{u'(x)}{v'(x)}=a$，

因而 $\lim[v(x)\cdot\ln u(x)]=-\lim\dfrac{u'(x)}{v'(x)}\cdot\lim\dfrac{v(x)}{u(x)}\cdot\lim v(x)=-a\times\dfrac{1}{c}\times 0=0$，

进而 $\lim u(x)^{v(x)}=1$.

文献[1]～[3]上的例子“求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$”和习题“求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$”都是这个类型，其中 x 与 x 是等价无穷小，x 与 $\sin x$ 也是等价无穷小，因而结果都是 1.

1.2 当指数比底数低阶时，0^0 确定为 1

定理 2 假设在某一个过程下有 $\lim u(x)=0$ 且 $\lim v(x)=0$，则如果 $\lim\dfrac{v(x)}{u(x)}=0$，且 $\lim\dfrac{v(x)u'(x)}{v'(x)}=b$，则必有 $\lim u(x)^{v(x)}=1$.

证明：同定理 1 的证明首先 $\lim u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim[v(x)\cdot\ln u(x)]}$，

又因为 $\lim[v(x)\cdot\ln u(x)]=\lim\left[\dfrac{\ln u(x)}{\dfrac{1}{v(x)}}\right]=\lim\left\{\dfrac{u'(x)}{u(x)}\times\left[-\dfrac{v^2(x)}{v'(x)}\right]\right\}$

$$=\lim\left\{\frac{u'(x)}{v'(x)}\times\left[-\frac{v(x)}{u(x)}\right]\times v(x)\right\}=-\lim\frac{v(x)u'(x)}{v'(x)}\cdot\lim\frac{v(x)}{u(x)},$$

因为 $\lim\dfrac{v(x)}{u(x)}=0$，并且 $\lim\dfrac{v(x)u'(x)}{v'(x)}=b$，

因而 $\lim[v(x)\cdot\ln u(x)]=-\lim\dfrac{v(x)u'(x)}{v'(x)}\cdot\lim\dfrac{v(x)}{u(x)}=-b\times 0=0$，

进而 $\lim u(x)^{v(x)}=1$.

例：求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)^x$

解：此处 $u(x)=\dfrac{1}{\ln x}$，$v(x)=x$，显然，$\lim u(x)=0$，$\lim v(x)=0$.

此外，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$.

又因为 $u'(x)=\dfrac{-1}{x\ln^2 x}$，$v'(x)=1$，所以，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{v(x)u'(x)}{v'(x)}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln^2 x}=0$.

因此，由定理 2 得知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)^{x}=1.$

注：$\lim\limits_{x\to 0}x^{x^4}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{x^2}=1$ 也是该定理使用的 2 个典型的例子。

1.3 当底数比指数高阶时，0^0 结果不确定

当 $\lim\dfrac{u(x)}{v(x)}=0$ 时，因为 $\lim\dfrac{v'(x)}{u'(x)}$ 可能为 0，也可能为非零常数，还可能为∞，所以 $\lim u(x)^{v(x)}$ 的计算结果不能确定。

比如：$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x/\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x/\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}/\dfrac{-1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，

且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'}{x'}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\ln^2 x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2x\ln x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln x}\ln x}=\mathrm{e}.$

此例中，$u(x)=x$ 是比 $v(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ 更高阶的无穷小量，且 $\lim\dfrac{v'(x)}{u'(x)}=\infty$，而 $\lim u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}\neq 1.$ 而“$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{2}{\ln(\sin x)}}$”其结果是 e^2.

可见，$\lim u(x)^{v(x)}$ 的计算结果不能确定。

2 结论

利用无穷小阶的比较探讨了底数 $u(x)$ 与指数 $v(x)$ 作为无穷小的阶对于 $\lim u(x)^{v(x)}$ 结果的影响，给出了 2 个方便判断的定理，尤其是定理 1 很方便的判断为确定不定型 $\lim u(x)^{v(x)}$ 的值提供了有价值的判断依据。然而，在定理 2 中笔者加了一个不方便操作的限制条件 $\lim\left[\dfrac{u'(x)}{v'(x)}\cdot\dfrac{v(x)}{u(x)}v(x)\right]=0$，望有更多同仁给出更宽松的条件和严格的结论。

[参考文献] (References)

[1] 同济大学应用数学系. 高等数学（6 版，上册)[M]. 北京：高等教育出版社，2007.
Applied Mathematical Department，Tongji University. Advanced mathematics (6th Edtion，part Ⅰ)[M]. Beijing：Higher Education Press，2007. (in Chinese)

[2] 同济大学应用数学系. 高等数学（5 版，上册)[M]. 北京：高等教育出版社，2004.
Applied Mathematical Department，Tongji University. Advanced mathematics (5th Edtion，part Ⅰ)[M]. Beijing：Higher Education Press，2004. (in Chinese)

[3] 李忠，周建莹. 高等数学（上册)[M]. 北京：北京大学出版社，2004.
LI Z，ZHOU J Y. Advanced mathematics (part Ⅰ)[M]. Beijing：Peking University Press，2004. (in Chinese)

[4] 韩云瑞. 高等数学典型题精讲[M]. 大连：大连理工大学出版社，2003.
HAN Y R. Earnest lectures on typical problems in advanced mathematics[M]. Dalian：Dalian University of Technology Press，2003. (in Chinese)

[5] 龚谊承，赵喜林. 对教材中 0^0 型极限内容的建议[J]. 高等数学研究，2010，13 (5)：9-10.
GONG Y C，ZHAO X L. Suggestions on teaching the limit of 0^0 form[J]. Studies in College Mathematics，2010，13(5)：9-10. (in Chinese)

[6] 赵苗婵，高树玲. 无穷小阶的比较及应用[J]. 四川教育学院学报，2007，23 (11)：107-108.
ZHAO M C，GAO S L. Comparison and application of the order of infinitesimal[J]. Journal of Sichuan College of Education，2007，23(11)：107-108. (in Chinese)