定义 3 以 L 集合为元素的矩阵 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})_{n\times m}$ 称为 $\boldsymbol{L}$ 矩阵，其中，m_{ij} 为矩阵中第 i 行、第 j 列交点处元素[3~4]。

定义 4 设 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})_{m\times k}$，$\boldsymbol{N}=(n_{ij})_{k\times n}$ 都是 $\boldsymbol{L}$ 矩阵，则 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 的连接积 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{N}$ 也是 $\boldsymbol{L}$ 矩阵[3]，其中，

$$\boldsymbol{Q}=(q_{ij})_{m\times n},$$
$$q_{ij}=\bigcup_{r=1}^{k}(m_{ir}\cdot n_{rj})\quad(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n).$$

定义 5 设图 $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 为具有 n 个顶点的简单有向图，则称 n 阶 $\boldsymbol{L}$ 矩阵

$$\boldsymbol{M}=(m_{ij})_{n\times n},$$

其中，$m_{ij}=\begin{cases}0, & (v_i,v_j)\notin E(G),\\ v_iv_j, & (v_i,v_j)\in E(G),\end{cases}$ 为图 G 的 $\boldsymbol{L}$ 邻接矩阵[3]。

定义 6 定义图 $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 的边矩阵 $\boldsymbol{E}=(e_{ij})_{n\times n}$，其中 $e_{ij}=(v_i,v_j)$，简记为 v_iv_j.

可见矩阵 $\boldsymbol{E}$ 中的元素是集合 L 的子集。

记 $\boldsymbol{E}$ 中第 i 个列向量 $\boldsymbol{E}_{c_i}=[e_{1i},e_{2i},\cdots,e_{ki},\cdots,e_{ni}]^{\mathrm{T}}(1\leqslant k\leqslant n,\ k\neq i)$，$\boldsymbol{E}$ 中第 i 个行向量 $\boldsymbol{E}_{r_i}=[e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{ik},\cdots,e_{in}](1\leqslant k\leqslant n,\ k\neq i)$，$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{E}_{c_i}\cdot\boldsymbol{E}_{r_i}$ 为矩阵 $\boldsymbol{E}$ 对应的通路矩阵。可见对应标量 i，通路矩阵中的元素描述了经过顶点 v_i 的所有长度不超过 2 的通路。

2 算法

2.1 单个子图

步骤 1：形成图 $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 的 $\boldsymbol{L}$ 邻接矩阵 $\boldsymbol{E}=(e_{ij})_{n\times n}$，记做 $\boldsymbol{E}(k)$，$k=1$.

步骤 2：对 $\boldsymbol{E}$ 同时进行相同的初等行变换与初等列变换，将子图的边界节点变换到矩阵的右下角，计算通路矩阵 $\boldsymbol{W}(k)=\boldsymbol{E}_{c_i}(k)\cdot\boldsymbol{E}_{r_i}(k)$.

步骤 3：修改边矩阵，

$$k=k+1;$$
$$\boldsymbol{E}(k+1)=\boldsymbol{E}(k)+\boldsymbol{W}(k);$$

转至步骤 2.

步骤 4：$\boldsymbol{E}(n-1)$ 对角线上元素即为所求环路，结束。

2.2 多个子图 (讨论只有 2 个子图的情形)

1) 用任意割集，将图划分为 2 个子图：V_s，V_t. 分别对 V_s，V_t 使用上述方法得子图内环路，组成环路集合 M_1.

2) 求子图间边界节点的连通路径：收缩除边界节点外其他节点，得到边界节点之间的通路。

3) 令 L 集合 $A=\{a_{ij}|a_{ij}=v_iv_j,\ v_i\in V_s,\ v_j\in V_t\}$，$L$ 集合 $B=\{b_{uv}|b_{uv}=v_uv_v,\ v_v\in V_s,\ v_u\in V_t\}$，计算 $P=A\cdot B$. 将 2) 中结果带入 P 中组成回路集合 M_2，与 M_1 合并得网络环路集合 $M=M_1\cup M_2$.

3 实例

有向图 $\boldsymbol{G}$ 如图 1 所示。设 $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}\in V_s$，$\{v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10},v_{11},v_{12}\}\in V_t$.

分别计算 V_s，V_t 中环路：

$$\boldsymbol{E}_s(1)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&v_1v_5\\ v_2v_1&0&0&0&0\\ v_3v_1&v_3v_2&0&v_3v_4&0\\ 0&0&v_4v_3&0&0\\ 0&0&v_5v_3&v_5v_4&0\end{bmatrix}.$$

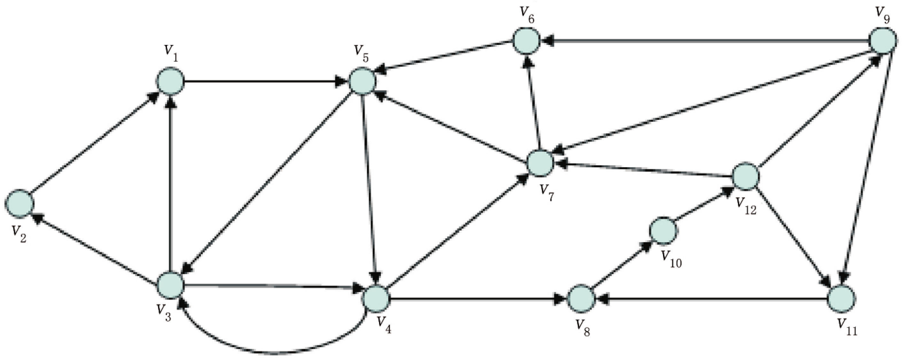

图 1 有向图 $\boldsymbol{G}$

Fig. 1 Directed graph $\boldsymbol{G}$

$$\boldsymbol{E}_s(4)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & v_1v_5 \\ v_2v_1 & 0 & 0 & 0 & v_2v_1v_5 \\ v_3v_1 & v_3v_2 & 0 & v_3v_4 & v_3v_1v_5,\ v_3v_2v_1v_5 \\ 0 & 0 & v_4v_3 & v_4v_3v_4 & v_4v_3v_1v_5,\ v_4v_3v_2v_1v_5 \\ 0 & 0 & v_5v_3 & v_5v_4,\ v_5v_3v_4 & v_5v_3v_1v_5,\ v_5v_3v_2v_1v_5,\ v_5v_4v_3v_1v_5,\ v_5v_4v_3v_2v_1v_5 \end{bmatrix}.$$

得环路：$v_4v_3v_4$，$v_5v_3v_1v_5$，$v_5v_3v_2v_1v_5$，$v_5v_4v_3v_1v_5$，$v_5v_4v_3v_2v_1v_5$.

同理，对原始边矩阵同时进行初等行与初等列变换，将边界节点对应行与列挪动到矩阵后方，得

$$\boldsymbol{E}_t(1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & v_9v_{11} & 0 & v_9v_6 & v_9v_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_{10}v_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_{11}v_8 \\ v_{12}v_9 & 0 & v_{12}v_{11} & 0 & 0 & v_{12}v_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_7v_6 & 0 & 0 \\ 0 & v_8v_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{E}_t(6)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & v_9v_{11} & 0 & v_9v_6 & v_9v_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_{10}v_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_{11}v_8 \\ v_{12}v_9 & 0 & v_{12}v_{11},v_{12}v_9v_{11} & 0 & v_{12}v_9v_6 & v_{12}v_7,v_{12}v_9v_7 & v_{12}v_{11}v_8,v_{12}v_9v_{11}v_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_7v_6 & 0 & 0 \\ 0 & v_8v_{10} & 0 & v_8v_{10}v_{12} & v_8v_{10}v_{12}v_9v_6 & v_8v_{10}v_{12}v_7,v_8v_{10}v_{12}v_9v_7 & v_8v_{10}v_{12}v_{11}v_8,v_8v_{10}v_{12}v_9v_{11}v_8 \end{bmatrix}.$$

得环路：$v_8v_{10}v_{12}v_{11}v_8$，$v_8v_{10}v_{12}v_9v_{11}v_8$.

于是，

$$M_1=\{v_4v_3v_4,\ v_5v_3v_1v_5,\ v_5v_3v_2v_1v_5,\ v_5v_4v_3v_1v_5,\ v_5v_4v_3v_2v_1v_5\}\cup\{v_8v_{10}v_{12}v_{11}v_8,\ v_8v_{10}v_{12}v_9v_{11}v_8\}.$$

计算边界节点间通路：

在 $\boldsymbol{E}_s(1)$ 基础上依次收缩节点 v_1，v_2，v_3，得矩阵

$$\begin{bmatrix} v_4v_3v_4 & v_4v_3v_1v_5,\ v_4v_3v_2v_1v_5 \\ v_5v_4,\ v_5v_3v_4 & v_5v_3v_1v_5,\ v_5v_3v_2v_1v_5,\ v_5v_4v_1v_5,\ v_5v_4v_3v_1v_5,\ v_5v_4v_3v_2v_1v_5 \end{bmatrix}.$$

得 V_s 边界节点 v_4，v_5 间通路，

$$\mathrm{Path}(v_4v_5)=v_4v_3v_1v_5,\ v_4v_3v_2v_1v_5;$$
$$\mathrm{Path}(v_5v_4)=v_5v_4,\ v_5v_3v_4.$$

在 $\boldsymbol{E}_t(1)$ 基础上分别收缩节点 v_9，v_{10}，v_{11}，v_{12}，得

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v_7v_6 & 0 & 0 \\ v_8v_{10}v_{12}v_9v_6 & v_8v_{10}v_{12}v_7,\ v_8v_{10}v_{12}v_9v_7 & v_8v_{10}v_{12}v_{11}v_8,\ v_8v_{10}v_{12}v_9v_{11}v_8 \end{bmatrix}.$$

计算 v_6，v_7，v_8 间通路，

收缩节点 v_6，得 $\mathrm{Path}(v_8v_7)=\{v_8v_{10}v_{12}v_7,\ v_8v_{10}v_{12}v_9v_7\}$；

收缩节点 v_7，得 $\mathrm{Path}(v_8v_6)=\{v_8v_{10}v_{12}v_9v_6,\ v_8v_{10}v_{12}v_7v_6,\ v_8v_{10}v_{12}v_9v_7v_6\}$；

收缩节点 v_8，得 $\mathrm{Path}(v_7v_6)=v_7v_6$.

计算割集关联环路：

$$A=\{v_4v_7,\ v_4v_8\},\ B=\{v_7v_5,\ v_6v_5\}.$$
$$M_2=A\cdot B=\{v_4v_7v_5,\ v_4v_7\cdot v_6v_5,\ v_4v_8\cdot v_7v_5,\ v_4v_8\cdot v_6v_5\}.$$
$$v_4v_7v_5\cdot\mathrm{Path}(v_5,\ v_4)=v_4v_7v_5\{v_5v_4,\ v_5v_3v_4\}=\{v_4v_7v_5v_4,\ v_4v_7v_5v_3v_4\}.$$
$$\begin{aligned} v_4v_7\cdot v_6v_5\cdot\mathrm{Path}(v_5,\ v_4) &= v_4v_7\mathrm{Path}(v_7,\ v_6)v_6v_5\mathrm{Path}(v_5,\ v_4)\\ &= v_4v_7v_6v_5\{v_5v_4,\ v_5v_3v_4\}=\{v_4v_7v_6v_5v_4,\ v_4v_7v_6v_5v_3v_4\}.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} v_4v_8\cdot v_7v_5\cdot\mathrm{Path}(v_5,\ v_4) &= v_4v_8\mathrm{Path}(v_8,\ v_7)v_7v_5\mathrm{Path}(v_5,\ v_4)\\ &= v_4v_8\{v_8v_{10}v_{12}v_7,\ v_8v_{10}v_{12}v_9v_7\}v_7v_5\\ &= \{v_4v_8v_{10}v_{12}v_7v_5,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_9v_7v_5\}\{v_5v_4,\ v_5v_3v_4\}\\ &= \{v_4v_8v_{10}v_{12}v_7v_5v_4,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_7v_5v_3v_4,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_9v_7v_5v_4,\\ &\quad v_4v_8v_{10}v_{12}v_9v_7v_5v_3v_4\}.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} v_4v_8\cdot v_6v_5\cdot\mathrm{Path}(v_5,\ v_4) &= v_4v_8\mathrm{Path}(v_8,\ v_6)v_6v_5\mathrm{Path}(v_5,\ v_4)\\ &= \{v_4v_8v_{10}v_{12}v_9v_6v_5,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_7v_6v_5,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_9v_7v_6v_5\}\{v_5v_4,\ v_5v_3v_4\}\\ &= \{v_4v_8v_{10}v_{12}v_9v_6v_5v_4,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_9v_6v_5v_3v_4,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_7v_6v_5v_4,\\ &\quad v_4v_8v_{10}v_{12}v_7v_6v_5v_3v_4,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_9v_7v_6v_5v_4,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_9v_7v_6v_5v_3v_4\}.\end{aligned}$$

由步骤 2 查找 v_7v_6，v_5v_4，v_8v_7，v_8v_6 间路径，得

$$\mathrm{Path}(v_7v_6)=\{v_7v_6\},$$
$$\mathrm{Path}(v_5v_4)=\{v_5v_4,\ v_5v_3v_4\},$$
$$\mathrm{Path}(v_8v_7)=\{v_8v_{10}v_{12}v_7,\ v_8v_{10}v_{12}v_9v_7\},$$
$$\mathrm{Path}(v_8v_6)=\{v_8v_{10}v_{12}v_9v_6,\ v_8v_{10}v_{12}v_7v_6,\ v_8v_{10}v_{12}v_9v_7v_6\}.$$

带入 $A\cdot B$，得

$$\begin{aligned} M_2 &= \{v_4v_7v_5\{v_5v_4,\ v_5v_3v_4\},\ v_4v_7v_6v_5\{v_5v_4,\ v_5v_3v_4\},\ v_4v_8\{v_8v_{10}v_{12}v_7,\ v_8v_{10}v_{12}v_9v_7\}\\ &\quad v_7v_5\{v_5v_4,\ v_5v_3v_4\},\ v_4v_8\{v_8v_{10}v_{12}v_9v_6,\ v_8v_{10}v_{12}v_7v_6,\ v_8v_{10}v_{12}v_9v_7v_6\}v_6v_5\{v_5v_4,\ v_5v_3v_4\}\}\\ &= \{\{v_4v_7v_5v_4,\ v_4v_7v_5v_3v_4\},\ \{v_4v_7v_6v_5v_4,\ v_4v_7v_6v_5v_3v_4\},\\ &\quad \{v_4v_8v_{10}v_{12}v_7v_5v_4,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_7v_5v_3v_4,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_9v_7v_5v_4,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_9v_7v_5v_3v_4\},\\ &\quad \{v_4v_8v_{10}v_{12}v_9v_6v_5v_4,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_9v_6v_5v_4,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_7v_6v_5v_4,\\ &\quad v_4v_8v_{10}v_{12}v_7v_6v_5v_3v_4,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_9v_7v_6v_5v_4,\ v_4v_8v_{10}v_{12}v_9v_7v_6v_5v_3v_4\}\}.\end{aligned}$$

得所有环路：

$$M = M_1 \cup M_2 = \{v_4 v_3 v_4, v_4 v_7 v_5 v_4, v_4 v_7 v_5 v_3 v_4, v_4 v_7 v_6 v_5 v_4, v_4 v_7 v_6 v_5 v_3 v_4, v_4 v_8 v_{10} v_{12} v_7 v_5 v_4, \\ v_4 v_8 v_{10} v_{12} v_7 v_5 v_3 v_4, v_4 v_8 v_{10} v_{12} v_7 v_6 v_5 v_4, v_4 v_8 v_{10} v_{12} v_7 v_6 v_5 v_3 v_4, v_4 v_8 v_{10} v_{12} v_9 v_6 v_5 v_4, \\ v_4 v_8 v_{10} v_{12} v_9 v_6 v_5 v_3 v_4, v_4 v_8 v_{10} v_{12} v_9 v_7 v_5 v_4, v_4 v_8 v_{10} v_{12} v_9 v_7 v_5 v_3 v_4 \\ v_4 v_8 v_{10} v_{12} v_9 v_7 v_6 v_5 v_4, v_4 v_8 v_{10} v_{12} v_9 v_7 v_6 v_5 v_3 v_4, v_5 v_3 v_1 v_5, v_5 v_3 v_2 v_1 v_5, \\ v_5 v_4 v_3 v_1 v_5, v_5 v_4 v_3 v_2 v_1 v_5 v_8 v_{10} v_{12} v_{11} v_8, v_8 v_{10} v_{12} v_9 v_{11} v_8\}.$$

4 结论

算法运用子图的概念对网络进行分治，将求解图中所有节点间通路的计算减少为只计算割集中边所对应节点的通路，并继承文献[1]中算法的优点，利用收缩节点的方法计算特定节点间路径。算法思路清晰，原理简单。

[参考文献] (References)

[1] 王玉英，陈平，苏旸. 生成有向图中全部简单回路的一种新算法[J]. 陕西师范大学学报，2008，36 (4)：12-15.
WANG Y Y，CHEN P，SU Y. A new algorithm to find all elementary circuits of a directed graph[J]. J. Shanxi Normal Univ.，2008，36(4)：12-15. (in Chinese)

[2] JAMES C T. An efficient search algorithm to find the elementary circuits of graph[J]. Communications of the ACM，1970，13(12)：273-276.

[3] 毕双艳，郭金海，齐明. 有向图中初级有向回路的求解算法及实例[J]. 长春邮电学院学报，1999，17 (2)：41-45.
BI S Y，GUO J H，QI M. An algorithm and example of solution to primary oriented circuits in a digraph[J]. Journal of Changchun Post and Telecommunication Institute，1999，17(2)：41-45. (in Chinese)

[4] 郭俊杰，伊崇信，毕双艳，等. 哈密顿回路存在性判定及输出算法[J]. 吉林大学自然科学学报，1998 (2)：5-8.
GUO J J，YI C X，BI S Y，et al. Existence judgement and output algorithm of the hamiltonian circuit[J]. Journal of Jilin University (Nature Science)，1998(2)：5-8. (in Chinese)