泛函。

文章推导出完整的等价条件，从而给出带参数的三类变量变分原理的完整、准确的表述。

1 符号规定

为叙述方便，把弹性力学静力平衡问题的基本方程和边界条件罗列如下[9~10]。

1）平衡方程：在域 V 内，

$$\boldsymbol{D\sigma}+\bar{\boldsymbol{f}}=0; \tag{1-1}$$

2）应变-位移关系：在域 V 内，

$$\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=0; \tag{1-2}$$

3）应力-应变关系：在域 V 内，

$$\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{A\varepsilon}=0; \tag{1-3}$$

4）位移给定的边界条件：在 S_u 上，

$$\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}=0; \tag{1-4}$$

5）外力给定的边界条件：在 S_σ 上，

$$\boldsymbol{T}-\bar{\boldsymbol{T}}=0 \quad (\boldsymbol{T}=\boldsymbol{L\sigma}); \tag{1-5}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{u}=[u, v, w]^{\mathrm{T}}$；

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} l & 0 & 0 & 0 & n & m \\ 0 & m & 0 & n & 0 & l \\ 0 & 0 & n & m & l & 0 \end{bmatrix},$$

其中，l，m，n 均为边界外法线的方向余弦；$\bar{\boldsymbol{f}}$ 为已知体积力；$\bar{\boldsymbol{T}}$ 为已知边界力；$\bar{\boldsymbol{u}}$ 为已知边界位移。

2 三类变量广义变分原理的泛函通式

不难看出，由三类变量可能构成的单项能量泛函，在域 V 内，有且只有以下 7 项：

1）$\int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V$；

2）$\int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V$；

3) $\int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}V$；

4) $\int_V (\boldsymbol{A\varepsilon})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}V$；

5) $\int_V (\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}V$；

6) $\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A\varepsilon} \, \mathrm{d}V$；

7) $\int_V \overline{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}V.$

在边界 S_σ，S_u 上，有

$$\int_{S_u} \bar{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T} \mathrm{d}S, \int_{S_u} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T} \mathrm{d}S, \int_{S_\sigma} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T} \mathrm{d}S, \int_{S_\sigma} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \overline{\boldsymbol{T}} \mathrm{d}S.$$

因此，三类变量广义变分原理的泛函一定包含在下列泛函之中：

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_V [\beta_1 \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varepsilon} + \beta_2 \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} + \beta_3 (\boldsymbol{A\varepsilon})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} + \\ & \frac{1}{2} \beta_4 \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \beta_5 (\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} + \frac{1}{2} \beta_6 \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A\varepsilon} + \beta_0 \overline{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}] \mathrm{d}V + \\ & \int_{S_u} (\alpha_1 \bar{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T} + \alpha_2 \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T}) \mathrm{d}S + \int_{S_\sigma} (\alpha_3 \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \overline{\boldsymbol{T}} + \alpha_4 \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T}) \mathrm{d}S, \end{aligned} \tag{2}$$

其中，$\beta_i (i = 0, 1, \cdots, 6)$，$\alpha_j (j = 1, 2, 3, 4)$ 均为待定的实常数。

下面要做的是，在式（2）中筛选出三类变量广义变分原理的泛函。

假设式（2）是三类变量广义变分原理的泛函，则一阶变分 $\delta\Pi = 0$. 由此可得以下欧拉方程。

域 V 内：

$$\begin{gathered} \beta_1 \boldsymbol{\sigma} + \beta_3 \boldsymbol{A} \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} + \beta_6 \boldsymbol{A\varepsilon} = 0, \\ \beta_1 \boldsymbol{\varepsilon} + \beta_2 \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} + \beta_4 \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = 0, \\ \beta_0 \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} - \beta_2 \boldsymbol{D\sigma} - \beta_3 \boldsymbol{DA\varepsilon} - \beta_5 \boldsymbol{DAD}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} = 0. \end{gathered}$$

在 S_u 上：

$$\begin{gathered} \alpha_2 \boldsymbol{T} + \beta_2 \boldsymbol{T} + \beta_3 \boldsymbol{LA\varepsilon} + \beta_5 \boldsymbol{LAD}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} = 0, \\ \alpha_1 \bar{\boldsymbol{u}} + \alpha_2 \boldsymbol{u} = 0. \end{gathered}$$

在 S_σ 上：

$$\begin{gathered} \alpha_3 \overline{\boldsymbol{T}} + \alpha_4 \boldsymbol{T} + \beta_2 \boldsymbol{T} + \beta_3 \boldsymbol{LA\varepsilon} + \beta_5 \boldsymbol{LAD}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} = 0, \\ \alpha_4 \boldsymbol{u} = 0. \end{gathered}$$

将方程（1-1)～方程（1-5）代入以上欧拉方程，可得

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_3 + \beta_6 = 0, \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_4 = 0, \\ \beta_0 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_5 = 0, \\ \alpha_2 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_5 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_5 = 0, \\ \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

利用此方程组，α_1，α_2，α_3，β_4，β_5，β_6 可以用 β_0，β_1，β_2，β_3 来表示，即

$$\beta_6 = -(\beta_1+\beta_3),$$
$$\beta_4 = -(\beta_1+\beta_2),$$
$$\beta_5 = -(\beta_0+\beta_2+\beta_3),$$
$$\alpha_1 = -\beta_0,$$
$$\alpha_2 = \beta_0,$$
$$\alpha_3 = \beta_0.$$

代入式（2）可得

$$\Pi = \Pi(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \int_V [\beta_1\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_2\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} - \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \beta_3(\boldsymbol{A\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} - (\beta_0+\beta_2+\beta_3)\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} - \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_3)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\varepsilon} + \beta_0\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}V + \int_{S_u}\beta_0(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S + \int_{S_\sigma}\beta_0\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{T}}\mathrm{d}S. \tag{3}$$

式（3）中记 $\Pi = \Pi(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 是为下面叙述方便。

至此已证明，当方程（1-1）～方程（1-5）成立时，$\delta\Pi=0$. 下面将进一步证明：当 $\beta_i(i=0,1,2,3)$ 满足一定条件时，由 $\delta\Pi=0$ 可以推得方程（1-1）～方程（1-5）。

令一阶变分 $\delta\Pi(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=0$，得欧拉方程：

在域 V 内，

$$\beta_1(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{A\varepsilon}) + \beta_3\boldsymbol{A}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\varepsilon}) = 0; \tag{4-1}$$
$$\beta_1(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}) + \beta_2(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}) = 0; \tag{4-2}$$
$$\beta_0(\bar{\boldsymbol{f}}+\boldsymbol{DAD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}) + \beta_2\boldsymbol{D}(\boldsymbol{AD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\sigma}) + \beta_3\boldsymbol{DA}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\varepsilon}) = 0; \tag{4-3}$$

在 S_σ 上，

$$\beta_0(\boldsymbol{LAD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{T}) + \beta_2\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{AD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}) + \beta_3\boldsymbol{LA}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}) = 0; \tag{4-4}$$

在 S_u 上，

$$\beta_0(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}) = 0;$$

取 $\beta_0\neq 0$，有

$$\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}} = 0.$$

式（4-2）两边同时左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，可得

$$\beta_1\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}) + \beta_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}) = 0,$$

即

$$\beta_1(\boldsymbol{A\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma}) + \beta_2(\boldsymbol{AD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\sigma}) = 0; \tag{4-5}$$

式（4-1）与式（4-5）两边相加，得

$$\beta_2(\boldsymbol{AD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\sigma}) + \beta_3\boldsymbol{A}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\varepsilon}) = 0; \tag{4-6}$$

代入式（4-3），因 $\beta_0\neq 0$，得

$$\bar{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{AD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}) = 0. \tag{4-7}$$

这是用位移表达的平衡方程。

此外，利用式（4-1）、式（4-5）消去含位移的项 $\boldsymbol{AD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$，可得

$$(\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3)(\boldsymbol{A\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma})=0; \tag{5-1}$$

也可以利用式（4-1）、式（4-5）消去含应力或应变的项，可得

$$(\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\varepsilon})=0; \tag{5-2}$$

$$(\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3)(\boldsymbol{AD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\sigma})=0. \tag{5-3}$$

显然，当且仅当

$$\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3\neq 0 \tag{6}$$

时，从欧拉方程可推得应变-位移关系式（1-2）和应力-应变关系式（1-3）。

然后，把推得的式（1-2）和式（1-3）代入式（4-4），可得

$$\beta_0(\boldsymbol{LAD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{T})=0.$$

注意：$\beta_0\neq 0$，有

$$\boldsymbol{LAD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{T}=0, \tag{7}$$

即

$$\boldsymbol{L\sigma}-\boldsymbol{T}=0. \tag{1-5}$$

可见，当且仅当 $\beta_0\neq 0$，$\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3\neq 0$ 时，由 $\delta\Pi=0$ 可以推得方程（1-1）～方程（1-5）。

综上所述，当且仅当 $\beta_0\neq 0$，$\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3\neq 0$ 时，$\Pi(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 是三类变量广义变分原理的泛函。不等式（6）是 $\delta\Pi(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=0$ 与方程（1-1）～方程（1-5）等价的条件，称为“等价条件”。

3 三类变量广义变分原理举例

给 $\beta_i(i=0,1,2,3)$ 一定的值，只要满足条件 $\beta_0\neq 0$，$\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3\neq 0$，就可以得到一个三类变量广义变分原理的泛函，举例如下。

当 $\beta_0=-1$，$\beta_1=\beta_2=1$，$\beta_3=0$ 时，三类变量广义变分原理的泛函的形式如下：

$$\Pi(-1,1,1,0)=\int_V[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\varepsilon}-\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}V-\int_{S_u}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S-\int_{S_\sigma}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{T}}\mathrm{d}S. \tag{8}$$

当 $\beta_0=-1$，$\beta_1=1$，$\beta_2=0$，$\beta_3=1$ 时，三类变量广义变分原理的泛函的形式如下：

$$\Pi(-1,1,0,1)=\int_V[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}+(\boldsymbol{A\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\varepsilon}-\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}V-\int_{S_u}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S-\int_{S_\sigma}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{T}}\mathrm{d}S. \tag{9}$$

当 $\beta_0=-1$，$\beta_1=-1$，$\beta_2=1$，$\beta_3=0$ 时，三类变量广义变分原理的泛函的形式如下：

$$\Pi(-1,-1,1,0)=\int_V[-\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\varepsilon}-\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}V-\int_{S_u}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S-\int_{S_\sigma}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{T}}\mathrm{d}S. \tag{10}$$

这就是 Hu-Washizu 变分原理的泛函，比较而言，此泛函有较简洁的形式。

当 $\beta_0=-1$，$\beta_1=-1/2$，$\beta_2=1/2$，$\beta_3=1/2$ 时，三类变量广义变分原理的泛函的形式如下：

$$\Pi=\Pi\left(-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_V\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\right]\mathrm{d}V-\int_{S_u}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S-\int_{S_\sigma}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{T}}\mathrm{d}S.$$

还可以写出其他形式的泛函。总之，至今人们已经发现的三类变量广义变分原理的泛函都可以通过 $\beta_i(i=0,1,2,3)$ 的适当取值($\beta_0\neq0$，$\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3\neq0$)，由式（3）得到。

有必要指出，用式（3）表示的泛函并不都对应一个三类变量广义变分原理。

例如，取 $\beta_0=-1$，$\beta_1=-1$，$\beta_2=0$，$\beta_3=0$，注意 $\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3=0$.

$$\Pi(-1,-1,0,0)=$$
$$\int_V\left[-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\right]\mathrm{d}V-\int_{S_u}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S-\int_{S_\sigma}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{T}}\mathrm{d}S.\quad(11)$$

这个泛函曾被认为是一个三类变量广义变分原理的泛函[2]，但其实不是[6]。尽管由式（1-1）～式（1-5）可以推得 $\delta\Pi(-1,-1,0,0)=0$，但却不能由 $\delta\Pi(-1,-1,0,0)=0$ 推得式（1-1）～式（1-5）。从欧拉方程（4-1）和（4-2）可以看出：应变–位移方程和应力–位移方程被 $\beta_2=0$，$\beta_3=0$ “淹没”了，因此从中不能得到应变–位移方程或应力–位移方程。

用 FELIPPA[5] 的“参数变分原理”的泛函表达式，式（11）可以写成

$$\Pi=\int_V\left[-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+[\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}]\begin{bmatrix}1/2&-1/2&0\\-1/2&1/2&0\\0&0&1/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\\\boldsymbol{\varepsilon}\\\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\end{Bmatrix}\right]\mathrm{d}V+\cdots$$

当然，它不是一个三类变量广义变分原理的泛函。

4 结论

弹性力学三类变量广义变分原理可以表述如下：三类变量广义变分原理的泛函均可用下式表达

$$\Pi=\Pi(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\int_V\left[\beta_1\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}+\beta_2\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}+\beta_3(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-(\beta_0+\beta_2+\beta_3)\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_3)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}+\beta_0\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\right]\mathrm{d}V+\int_{S_u}\beta_0(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S+\int_{S_\sigma}\beta_0\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{T}}\mathrm{d}S,$$

其中，$\beta_i(i=0,1,2,3)$ 是可选的实常数。但是，可用式（3）表示的泛函并非都是三类变量广义变分原理的泛函。当且仅当

$$\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3\neq0,\quad\beta_0\neq0$$

时，$\delta\Pi(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=0$ 与方程（1-1）～方程（1-5）等价。这时式（3）才是弹性力学三类变量广义变分原理的泛函。

[参考文献] (References)

[1] 田宗漱，卞学鐄. 多变量变分原理与多变量有限元方法[M]. 北京：科学出版社，2011.
TIAN Z S, BIAN X H. Variational principle with multi-variables & finite element methodes with multi-variables[M].

Beijing：Science Press，2011.（in Chinese).

[2] LONG Y Q. Several patterns of functional transformation and generalized variational principles with several arbitrary parameters[J]. Int. J. Solids Structures，1986，22(10)：1059-1069.

[3] 蒋中祥. 泛函中含有三个任意常数的广义变分原理[J]. 北京建筑工程学院学报，1987 (2)：29-38.
JIANG Z X. Generalized variationl principles whose functionals concerned with three arbitrary constants[J]. Journal of Beijing Institute of Civil Eng. & Arch.，1987(2)：29-38.（in Chinese)

[4] JIANG Z X. General form of generalized variational principles[A]. ATLURI S N，YAGAWA G，Computational Mechanics'88[C]. New York：Springer-Verlag，1988. 35 iii. 1-35iii. 2.

[5] FELIPPA C A. Parametrized multifield variational principles in elasticity：Ⅱ. Hybrid functionals and the free formulation[J]. Comm. in App. Num. Meth.，1989，5(2)：89-98.

[6] 王焕定，曹东步. 含有多个可选择参数的广义变分原理[J]. 哈尔滨建筑工程学院学报，1990，23 (3)：32-39.
WANG H D，CAO D B. Generalized variational pringciples with several selectable parameters[J]. Journal. of Harbin Institute of Civil Eng. & Arch.，1990，23(3)：32-39.（in Chinese)

[7] LIU S K，JIANG Z X. General form of the generalized variational principles in elasticity[J]. Communications in Applied Numerical Methods，1988，4(6)：749-760.

[8] 蒋中祥. Lagrange 乘子法和一般形式的广义变分原理[J]. 北京建筑工程学院学报，1989 (1)：34-41.
JIANG Z X. Lagrange multipler procedure and general form of generalized variational principles[J]. Journal of Beijing Institute of Civil Eng. & Arch.，1989(1)：34-41.（in Chinese)

[9] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京：科学出版社，1981.
HU H C. Variational principle in elasticity mechanics and its application[M]. Beijing：Science Press，1981.（in Chinese)

[10] 钱伟长. 高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理[J]. 应用数学和力学，1983 (2)：137-150.
QIAN W Z. Method of high-order Lagrange multiplier and generalized variational principles of elasticity with more general forms of functionals[J]. Applied Mathemtics and Mechanics，1983(2)：137-150.（in Chinese)