第7卷 第13期
2014年7月

highlights.paper.edu.cn
中国科技论文在线精品论文
Highlights of Sciencepaper Online

Vol.7 NO.13
July 2014

全等无穷大量及其在极限中的应用

陈思源

（西安思源学院基础部，西安 710038）

摘要：提出全等无穷大量这种新的概念，结合等价量的一些结论，研究全等无穷大量的性质、相关结论以及在极限中的应用，并给出一些应用实例。该研究为计算函数的极限提供了新的思路。

关键词：数学分析；等价无穷大量；全等无穷大量；极限；渐近线

中图分类号：O172 **文献标识码**：A **文章编号**：1674-2850(2014)13-1277-05

Congruent infinity and its application in the limits of functions

CHEN Siyuan

(*Foundation Department*, *Xi'an Siyuan University*, *Xi'an* 710038, *China*)

Abstract: In this paper, a new concept of congruent infinity is raised. Furthermore, its natures, related conclusions and some applications of congruent infinity are discussed by using some conclusions of equivalence, and some application examples are given. This research provides a new thinking for computing limits.

Key words: mathematical analysis; equivalent infinity; congruent infinity; limit; asymptote

0 引言

极限是微积分学中最重要的概念之一，微分、积分、级数等基本概念都是由极限定义和深入研究的，因此掌握解决极限问题的理论与手段显得十分必要。文献[1]～[3]给出了等价无穷小量和等价无穷大量的一些应用，使得一些极限问题的解决得以简化。这里将详细介绍全等无穷大量这种全新的概念，研究它的一些实用性质、相关重要结论以及在极限计算中的应用。

1 概念与性质

定义 1 若 $f(x)$，$g(x)$ 都是 $x\to x_0$ 时的无穷大量，且满足

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=0,$$

则称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的全等无穷大量，并记为 $f(x)\cong g(x)(x\to x_0\text{ 时})$.

定义 2[4] 若 $f(x)$，$g(x)$ 都是 $x\to x_0$ 时的无穷大量，且满足

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1,$$

则称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的等价无穷大量，记为 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0\text{ 时})$.

注：以上 2 个定义中的“$x\to x_0$”可换成“$x\to x_0^+$”，“$x\to x_0^-$”，“$x\to\infty$”，“$x\to-\infty$”和“$x\to+\infty$”等变化趋势。

作者简介：陈思源（1978—），男，讲师，主要研究方向：数学分析. E-mail：csy668999@sina.com

在变量 x 相同的变化趋势下，由全等无穷大量的定义不难得到以下性质与定理。

性质 1（自反性） 若 $f(x)\cong g(x)$，则 $g(x)\cong f(x)$.

性质 2（传递性） 若 $f(x)\cong g(x)$，$g(x)\cong h(x)$，则 $f(x)\cong h(x)$.

证明：设 $x\to\infty$ 时，$f(x)\cong g(x)$，$g(x)\cong h(x)$，则有

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0,\ \lim_{x\to\infty}[g(x)-h(x)]=0,$$

于是，

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-h(x)]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)+g(x)-h(x)]=0,$$

因此，$f(x)\cong h(x)$.

性质 3（线性叠加性） 若 $f_1(x)\cong g_1(x)$，$f_2(x)\cong g_2(x)$，$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)$ 仍为无穷大量，则 $k_1f_1(x)+k_2f_2(x)\cong k_1g_1(x)+k_2g_2(x)$，其中 k_1，k_2 均为常数。

性质 4（不唯一性） 若 $f_1(x)\cong g(x)$，$f_2(x)\cong g(x)$，则有 $f_1(x)=f_2(x)$ 或 $f_1(x)\cong f_2(x)$.

2 相关定理与结论

定理 1（全等无穷大量与等价无穷大量间的关系） 若 $f(x)\cong g(x)$，则 $f(x)\sim g(x)$，反之不一定成立。

证明：设 $x\to\infty$，其他的变化趋势下同理。由于 $f(x)\cong g(x)$，则有

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0,$$

于是，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}+1\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{g(x)}\right]\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]+1\\&=1.\end{aligned}$$

因此，$f(x)\sim g(x)$.

当 $x\to\infty$ 时，如果令 $f(x)=x$，$g(x)=x+1$，易知 $f(x)\sim g(x)$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=-1\neq 0$，因此该定理的逆定理不成立。

推论 1 $f(x)\cong g(x)$，则 $\ln f(x)\cong \ln g(x)$.

证明：不妨设 $x\to\infty$，由于 $f(x)\cong g(x)$，由定理 1 知 $f(x)\sim g(x)$，所以

$$\lim_{x\to\infty}[\ln f(x)-\ln g(x)]=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{f(x)}{g(x)}=\ln 1=0.$$

因此，$\ln f(x)\cong \ln g(x)$.

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f_1(x)+f_1(x)+g(x)]$，当 $f(x)\cong f_1(x)$ 时，则有 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+g(x)]$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f_1(x)+g(x)]$ 相等或同为 ∞，于是有以下定理。

定理 2（全等无穷大量替换定理 1） 若 $x\to\infty$ 时，$f(x)\cong f_1(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[f_1(x)+g(x)]$ 存在或为 ∞，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}[f_1(x)+g(x)]$. 对于变量 x 的其他趋向，定理同样成立。

文献[5]从等价无穷小量的角度对幂指函数极限的计算做出了讨论，根据全等无穷大量的定义与性质，这里从另一个角度找到一些计算幂指函数极限的方法。

定理 3（全等无穷大量替换定理 2） 若 $x\to\infty$ 时，$f(x)\cong f_1(x)$，$g(x)\to 1$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)^{f_1(x)}$ 存在或为 ∞，则 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)^{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)^{f_1(x)}$. 对于变量 x 的其他趋向，定理同样成立。

证明：由于 $x\to\infty$ 时，$f(x)\cong f_1(x)$，$g(x)\to 1$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)^{f(x)-f_1(x)}=1$，于是，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}g(x)^{f(x)}&=\lim_{x\to\infty}[g(x)^{f_1(x)}g(x)^{f(x)-f_1(x)}]\\&=\lim_{x\to\infty}g(x)^{f_1(x)}\lim_{x\to\infty}[g(x)^{f(x)-f_1(x)}]\\&=\lim_{x\to\infty}g(x)^{f_1(x)}.\end{aligned}$$

定理 4（全等无穷大量替换定理 3） 若 $x\to\infty$ 时，$g(x)\cong g_1(x)$，$f(x)\to 0$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}g_1(x)^{f(x)}$ 存在或为 ∞，则 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)^{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}g_1(x)^{f(x)}$. 对于变量 x 的其他趋向，定理同样成立。

证明：由于 $x\to\infty$ 时，$g(x)\cong g_1(x)$，$f(x)\to 0$，结合推论 1 便有

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)[\ln g(x)-\ln g_1(x)]\}=0.$$

于是，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}g(x)^{f(x)}&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)\ln g(x)]}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}f(x)[\ln g_1(x)+\ln g(x)-\ln g_1(x)]}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)\ln g_1(x)]+\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)[\ln g(x)-\ln g_1(x)]\}}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)\ln g_1(x)]}\\&=\lim_{x\to\infty}g_1(x)^{f(x)}.\end{aligned}$$

根据渐近线与全等无穷大的概念易得如下定理。

定理 5（渐近线的另一定义） 当 $x\to\infty$时，若有

$$f(x)\cong ax+b,$$

其中，a，b 为常数，则直线 $y=ax+b$ 为函数 $y=f(x)$ 的渐近线。

另外，可以验证下面几对全等无穷大量：

当 $x\to 0$ 时，有

1) $\dfrac{1}{\sin x}\cong\dfrac{1}{\arcsin x}\cong\dfrac{1}{\tan x}\cong\dfrac{1}{\arctan x}\cong\dfrac{1}{x}$；

2) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\cong\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}$；

3) $\dfrac{1}{\ln(x+1)}\cong\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}$；

4) $\dfrac{1}{1-\cos x}\cong\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{6}$；

5) $\dfrac{1}{(x+1)^n-1}\cong\dfrac{1}{nx}+\dfrac{1-n}{2n}$；

6) $\dfrac{1}{\sin^2 x}\cong\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{3}$；

等。

当 $x\to+\infty$时，有

7) $\sqrt[n]{a+x}\cong\sqrt[n]{x}\,(n>1)$（$a$ 为常数）；

8) $\sqrt[n]{f(x)}\cong\sqrt[n]{g(x)}\,(n>1)$，$f(x)\cong g(x)$ 时；

9）$\sqrt[n]{x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}\cong x+\frac{a_1}{n}$，也就是说函数 $y=\sqrt[n]{x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}$ 有水平渐近线$y=x+\frac{a_1}{n}$；

等。

以上结论不仅可以用来计算极限，而且可作函数值的近似计算。如

$$\frac{1}{(1+0.01)^3-1}\approx\frac{1}{3\times0.01}+\frac{1-3}{2\times3}=33.$$

3 应用举例

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{2}{\ln(1+\sin x)}-\frac{2}{e^{2x}-1}-\frac{1}{\tan x}\right]$.

解：由于 $x\to0$ 时，根据全等无穷大量的性质与相关结论，有

$$\frac{2}{\ln(1+\sin x)}\cong2\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{2}\right)\cong\frac{2}{x}+1,$$

$$\frac{2}{e^{2x}-1}\cong2\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{x}-1,$$

$$\frac{1}{\tan x}\cong\frac{1}{x},$$

再根据全等无穷大量的替换定理可得

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{2}{\ln(1+\sin x)}-\frac{2}{e^{2x}-1}-\frac{1}{\tan x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{2}{x}+1-\left(\frac{1}{x}-1\right)-\frac{1}{x}\right]=2.$$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[n]{5+x}-\sqrt[n]{7+x})$，其中 n 为大于 1 的整数。

解：由例题上面的结论 7）可知，$\sqrt[n]{5+x}\cong\sqrt[n]{x}$，$\sqrt[n]{7+x}\cong\sqrt[n]{x}$，再利用定理 2，可得本题结果为 0.

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1+2x+x^2+x^3}-\sqrt[3]{x+6x^2+x^3})$.

解：由例题上面的结论 9）与定理 2，可知

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1+2x+x^2+x^3}-\sqrt[3]{x+6x^2+x^3})=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{3}-\left(x+\frac{6}{3}\right)\right)=-\frac{5}{3}.$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{2}\right)^x$.

解：由例题上面的结论 2）与定理 4，可知

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{2}\right)^x=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}x^x}=1.$$

［参考文献］(References)

［1］ 陈思源，严峰军. 等价量代换在和式极限中的应用［EB/OL］. 北京：中国科技论文在线［2009-09-09］. http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/200909-281.
CHEN S Y, YAN F J. Several important theorems on limits added and its application［EB/OL］. Beijing: Sciencepaper Online［2009-09-09］. http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/200909-281. (in Chinese)

[2] 陈思源. 关于和式极限的几个重要定理及其应用[J]. 河南科学，2010，28 (4)：394-396.
CHEN S Y. Several important theorems on limit added and its applications[J]. Henan Science，2010，28(4)：394-396. (in Chinese)
[3] 刘桂仙，刘庆升. 求极限的等价无穷大代换[J]. 高等数学研究，2011，14 (1)：51-52.
LIU G X，LIU Q S. Equivalent infinities for limit problems[J]. Studies in College Mathematics，2011，14(1)：51-52. (in Chinese)
[4] 陈纪修，於崇华，金路. 数学分析：上册[M]. 北京：高等教育出社，2002.
CHEN J X，YU C H，JIN L. Mathematical analysis：vol.1[M]. Beijing：Higher Education Press，2002. (in Chinese)
[5] 陈茜，舒慧颖. 浅析幂指函数的极限问题[J]. 衡水学院学报，2011，13 (4)：8-9.
CHEN Q，SHU H Y. Limit problem of power exponent function[J]. Journal of Hengshui University，2011，13(4)：8-9. (in Chinese)