分数阶微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性

郑安利，冯育强，王蔚敏

（武汉科技大学理学院，武汉 430065）

摘要：在分数阶情形下，研究微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性。对具有 Caputo 导数的分数阶线性微分方程运用 Laplace 变换进行求解，再对其 Hyers-Ulam 稳定性进行讨论。对于非线性的情形，由于不能直接求出相应的解，而是用 Volterra 方程给出解析解的表达方式，然后利用分数阶 Gronwall 不等式的性质和不等式的放缩法讨论方程的 Hyers-Ulam 稳定性，得到相应的 K 值。

关键词：常微分方程；分数阶微分方程；Hyers-Ulam 稳定性；分数阶 Gronwall 不等式；Laplace 变换

中图分类号：O175.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1674-2850(2016)01-0063-08

Hyers-Ulam stability of fractional differential equations

ZHENG Anli, FENG Yuqiang, WANG Weimin

(*College of Science*, *Wuhan University of Science and Technology*, *Wuhan* 430065, *China*)

Abstract: This paper studies the Hyers-Ulam stability of fractional differential equations. The fractional differential equation with Caputo's derivative is solved by applying Laplace transform, and then its Hyers-Ulam stability is discussed. As for nonlinear condition, due to that the corresponding solution can not be directly found, the expression of the analytical solutions is given by Volterra equations. The conclusion of Hyers-Ulam stability is drawn via fractional Gronwall inequality and scaling of inequality to give the corresponding K values.

Key words: ordinary differential equation; fractional differential equation; Hyers-Ulam stability; fractional Gronwall inequality; Laplace transform

0 引言

分数阶微积分是在传统意义上的整数阶微积分的基础上提出的，虽然已有 300 多年的历史，但直至 19 世纪末，在 LIOUNVILLE，GRUNWALL，LETNIKOV 及 RIEMANN 等的努力下，相关理论才被逐渐建立起来。在这 300 多年间，因为没有结合实际并运用到物理力学等方面的研究中，数学家的研究一直停留在纯理论基础上，并没有取得突破性的进展，直至 20 世纪 90 年代才开始被广泛应用到自然科学的各个领域[1~5]。这时分数阶微积分理论分支得到了系统而快速的发展，研究成果丰硕，尤其是在解和稳定性方面。这里讨论的分数阶稳定性与 Gronwall 不等式[6~8]相关。

1940 年，ULAM[9]提出一个关于函数方程稳定性问题：若 X 是一个群，Y 是一个度量群，其度量为 $d(\,,\,)$，对任意 $\varepsilon>0$，是否存在 $\delta(\varepsilon)>0$，满足如下条件：如果一个映射 $f:X\to Y$ 对任意 $x, y\in X$，有 $d(f(xy), f(x)f(y))\leqslant\delta$，则存在一个同构 $h:X\to Y$ 对任意的 $x\in X$ 都有 $d(f(x), h(x))<\varepsilon$. 一年后，HYERS[10]对 Ulam 问题给出了肯定的答案：设 X 和 Y 是实的 Banach 空间和 $\varepsilon>0$，对每一个函数 $f:X\to Y$，若

基金项目：高等学校博士学科点专项科研基金（20134219120003）；国家自然科学基金（61473338）；湖北省自然科学基金重点项目（2013CFA131）；冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室基金（z201302）

作者简介：郑安利（1989—），男，硕士研究生，主要研究方向：常微分方程

通信联系人：冯育强，教授，主要研究方向：非线性泛函分析理论、方法与应用. E-mail: yqfeng6@126.com

$\forall x, y \in X$，满足

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\| \leqslant \varepsilon,$$

则存在唯一的可加函数 $A: X \to Y$，使得

$$\|f(x)-A(x)\| \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

成立。此后，许多数学工作者对该方面进行研究，也取得了大量的研究成果[11~12]。最近提出的关于 Ulam 问题的推广是用微分方程替代函数方程：$\varphi(f(t), y(t), y'(t), \cdots, y^{(m)}(t))=0$ 具有 Hyers-Ulam 稳定性，如果对任意的 $\varepsilon>0$ 和 $y \in C^m[a,b]$，满足 $\|\varphi(f(t), y(t), y'(t), \cdots, y^{(m)}(t))\| \leqslant \varepsilon$，则存在微分方程解 y_0，使得 $|y(t)-y_0(t)| \leqslant K(\varepsilon)$ 和 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} K(\varepsilon)=0$ 成立。OBLOZA[13~14]对线性微分方程 Hyers-Ulam 稳定性进行了讨论，ALSINA 等[15]在其后也发表了相关文章，对线性微分方程 $y'(x)=y(x)$ 的 Hyers-Ulam 稳定性进行了处理：对任意的 $x \in (a,+\infty)$，如果可微函数 $y(x)$ 是不等式 $|y'(x)-y(x)| \leqslant \varepsilon$ 的解，则存在一个常数 c 使得 $|y(x)-ce^x| \leqslant 3\varepsilon$ 成立。许多数学工作者在此基础上推广到一阶和更高阶的常系数线性微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性，JUNG 等[16]证明了线性微分方程的稳定性，RUS[17]利用 Gronwall 引理和弱的皮卡算子方法讨论了微分和积分方程的 Hyers-Ulam 稳定性。最近，数学工作者用积分因子方法讨论一阶和二阶常系数线性微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性[16,18~23]，POPA 等[24]也给出 n 阶常系数线性微分方程的结论。ALQIFIARY 等[25]利用 Laplace 变换方法讨论了 n 阶线性微分方程 Hyers-Ulam 稳定性，即如果 n 次连续可微函数 $y:(0,\infty) \to F$ 满足

$$\left| y^{(n)}(t)+\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k y^{(k)}(t)-f(t) \right| \leqslant \varphi(t),$$

对所有的 $t>0$，则存在微分方程解 $y_0:(0,\infty) \to F$，使得

$$|y(t)-y_\varepsilon(t)| \leqslant M \int_0^t e^{\alpha(t-x)} \varphi(x) dx$$

成立。目前，Hyers-Ulam 稳定性的研究已存在代数、函数、微分、积分和方程等方向[26~28]。现有研究主要是讨论整数阶的 Hyers-Ulam 稳定性，而分数阶的相关成果还不是很完善。因此，这里在分数阶情形下，讨论微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性。

1 预备知识

1.1 分数阶 Caputo 导数

定义 1（Riemann-Liouville 积分[29]）设 $n \in \mathbb{R}$，积分算子 J_a^n 定义在 $L_1[a,b]$ 上，对于 $x \in [a,b]$，有 $J_a^n f(x)=\dfrac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$.

定理 1 设 $n>0$，$m=\lceil n \rceil$，$x \in (0,+\infty)$，$f(x)$ 在定义域内是连续函数，则

$$_cD_{0,x}^n y(x)=J_{0,X}^{(m-n)} \frac{d^m}{dt^m} y(t)=\frac{1}{\Gamma(m-n)}\int_0^x (x-t)^{m-n-1} y^{(m)}(t) dt.$$

定理 2 设 $n>0$， $m=\lceil n\rceil$， $f(x)\in A^m[a,b]$，则

$$J_a^n D_{*,a}^n f(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{m}\frac{D^k f(a)}{k!}(x-a)^k,$$

其中， $k=0,1,\cdots,m-1$.

1.2 Mittag-Laffler 函数

定义 2 双参数 $n_1,n_2>0$，函数 E_{n_1,n_2} 定义为

$$E_{n_1,n_2}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{\Gamma(jn_1+n_2)},$$

其中， $x\in\mathbb{R}$. 该级数收敛，当 $n_2=1$ 时为单参数 Mittag-Laffler 函数。

1.3 Laplace 变换

定义 3 设 $f:[0,\infty)\in\mathbb{R}$ 为已给出的函数，函数 F 定义为

$$F(s)=\mathscr{L}f(x):=\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}s.$$

定义 4 如果 $f(x)=\int_0^x f_1(x-t)f_2(t)\mathrm{d}t$，则 $\mathscr{L}f(x):=\mathscr{L}f_1(s)\cdot\mathscr{L}f_2(s)$，其中， $f,f_1,f_2:[0,\infty]\in\mathbb{R}$.

定理 3 设 $n>0$ 和 $m=\lceil n\rceil$，如果 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 使得 $\mathscr{L}f$ 在 $[s_0,\infty)$ 上存在， $s_0\in\mathbb{R}$，则对于 $s>\max\{0,s_0\}$，有

$$\mathscr{L}J_0^n f(s)=\frac{1}{s^n}\mathscr{L}f(s)$$

和

$$\mathscr{L}f_1(s)=s^m\mathscr{L}f(s)-\sum_{k=1}^{m}s^{m-k}f^{(k-1)}(0).$$

定理 4 设 $n>0,\lambda\in\mathbb{R}$，定义 $f(x)=E_n(\lambda x^n)$，则 $\mathscr{L}f(s)=\dfrac{s^{n-1}}{s^n-\lambda}$.

定理 5（分数阶 Gronwall 不等式[27~28]）设 $\beta>0$， $u(x)$ 在 $[0,h)$（其中 $h\leqslant+\infty$）上是局部可积的非负函数， $g(x)$ 定义在 $[0,h)$ 上是非负单调不减的连续函数， $g(x)\leqslant T$（$T>0$ 为常数），如果 $f(x)$ 在 $[0,h)$ 上是非负的局部可积函数，且满足

$$f(x)\leqslant u(x)+g(x)\int_0^x(x-t)^{\beta-1}f(t)\mathrm{d}t,$$

则有

$$f(x)\leqslant u(x)+\int_0^x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[g(x)\Gamma(\beta)]^k}{\Gamma(k\beta)}(x-t)^{k\beta-1}u(t)\,\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant x<h.$$

2 分数阶微分方程一般解

分数阶微分方程解的表达形式在线性和非线性的情形下是不同的，先给出线性情形，对于阶数

$0<n<1$时用 Laplace 变换求解，再给出$n>1$时的表达式；对于非线性情况，则给出解所满足的积分方程。

定理 6 设$0<n<1$，$\lambda\in\mathbb{R}$且$\lambda\neq 0$，对满足初值条件$y(0)=y_0^{(0)}$的微分方程$D_{*,0}^{n}y(x)=\lambda y(x)+f(x)$，其中，$f(x):[0,h]\to\mathbb{R}$的一个给定函数，则解的表达式为

$$y(x)=y_0E_n(\lambda x^n)+\frac{1}{\lambda}\int_0^x f(x-t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(\lambda t^n)\mathrm{d}t\,.$$

证明：由定理 3 可知

$$s^n\mathscr{L}y(s)-y_0s^{n-1}=\lambda\mathscr{L}y(s)+\mathscr{L}f(s)\,,$$

结合定义 4 可知

$$\mathscr{L}y(s)=\frac{y_0s^{n-1}}{s^n-\lambda}+\frac{\mathscr{L}f(s)}{s^n-\lambda}\,,$$

$$\mathscr{L}y'(s)=s\mathscr{L}y(s)-y_0=\frac{s^n}{s^n-\lambda}-1=\frac{\lambda}{s^n-\lambda}\,.$$

根据上式和定理 4，得

$$y(x)=y_0E_n(\lambda x^n)+\frac{1}{\lambda}\int_0^x f(x-t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(\lambda t^n)\mathrm{d}t\,.$$

定理 7 设$n>1$，$m=\lceil n\rceil$，$\lambda\in\mathbb{R}$且$\lambda\neq 0$，对满足初值条件$D^ky(0)=y_0^{(k)},\ k=0,1,\cdots,m-1$的微分方程$D_{*,0}^{n}y(x)=\lambda y(x)+f(x)$，其中，$f(x):[0,h]\in\mathbb{R}$的一个给定函数，其解的表达式为

$$y(x)=\sum_{k=0}^{m-1}y_0^{(k)}J_0^kE_n(\lambda x^n)+\frac{1}{\lambda}\int_0^x f(x-t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_n(\lambda t^n)\mathrm{d}t\,.$$

注：证明方法与定理 6 相同，在此略去。

定理 8（非线性微分方程的解满足的积分方程） 设$n>1$，$m=\lceil n\rceil$，$y_0^{(0)},y_0^{(1)},\cdots,y_0^{(m-1)}\in\mathbb{R}$，函数$y\in[0,h]$是微分方程$D_{*,0}^{n}y(x)=\lambda y(x)+f(x,y(x))$的解，且满足初值条件$D^ky(0)=y_0^{(k)},\ k=0,1,\cdots,m-1$，则解$y$满足积分方程

$$y(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^k}{k!}y_0^{(k)}+\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^x(x-t)^{n-1}\left[\lambda y(t)+f(t,y(t))\right]\mathrm{d}t\,,$$

若$0<n<1$时，$y(x)=y_0+\dfrac{1}{\Gamma(n)}\displaystyle\int_0^x(x-t)^{n-1}\left[\lambda y(t)+f(t,y(t))\right]\mathrm{d}t$.

3 Hyers-Ulam 稳定性

3.1 分数阶线性方程的情形

定理 9 设$0<n<1$，$\lambda\in\mathbb{R}$且$\lambda\neq 0$，如果函数$f(x)$是$[0,h]$上的连续函数，$y_\varepsilon(x)$是$[0,h]$上的解析函数，对任意的$\varepsilon>0$使得$\left|D_{*,0}^{n}y_\varepsilon(x)-\lambda y_\varepsilon(x)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon$，则存在$D_{*,0}^{n}y(x)=\lambda y(x)+f(x)$的解$y(x):[0,h]\in\mathbb{R}$使得$\left|y_\varepsilon(x)-y(x)\right|\leqslant K\varepsilon$成立，对$\forall x\in[0,h]$，其中，$K=\dfrac{1}{|\lambda|}E_n(\lambda h^n)$.

证明：设 $D_{*,0}^{n}y_{\varepsilon}(x)=\lambda y_{\varepsilon}(x)+f_{\varepsilon}(x)$，则对 $\forall x\in[0,h]$ 有

$$\left|f_{\varepsilon}(x)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon. \tag{1}$$

对所有的 $x\in[0,h]$，由定理 6 可知

$$y_{\varepsilon}(x)=y_0E_n(\lambda x^n)+\frac{1}{\lambda}\int_0^x f_{\varepsilon}(x-t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(\lambda t^n)\mathrm{d}t. \tag{2}$$

由式（1）、式（2）可知

$$\begin{aligned}\left|y_{\varepsilon}(x)-y(x)\right|&\leqslant\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^x\left[f_{\varepsilon}(x-t)-f(x-t)\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(\lambda t^n)\,\mathrm{d}t\right|\\&=\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^x\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^j x^{nj-1}}{\Gamma(nj)}\left[f_{\varepsilon}(x-t)-f(x-t)\right]\mathrm{d}t\right|\\&=\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^x\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}(x-t)^{nj-1}}{\Gamma(nj)}\left[f_{\varepsilon}(t)-f(t)\right]\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\varepsilon\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left|\lambda^{j-1}\right|}{\Gamma(nj)}\int_0^x(x-t)^{nj-1}\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left|\lambda^{j-1}\right|}{\Gamma(nj)}(x-t)^{nj-1}\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{|\lambda|}E_n(\lambda h^n).\end{aligned} \tag{3}$$

故 $K=\frac{1}{|\lambda|}E_n(\lambda h^n)$ 得证。

定理 10 设 $n>1$，$m=\lceil n\rceil$，$\lambda\in\mathbb{R}$ 且 $\lambda\neq0$，如果函数 $f(x)$ 是 $[0,h]$ 上的连续函数，$y_{\varepsilon}(x)$ 是 $[0,h]$ 上的解析函数，对任意的 $\varepsilon>0$ 有 $\left|D_{*,0}^{n}y_{\varepsilon}(x)-\lambda y_{\varepsilon}(x)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon$，则存在 $D_{*,0}^{n}y(x)=\lambda y(x)+f(x)$ 的解 $y(x):[0,h]\in\mathbb{R}$ 使得 $\left|y_{\varepsilon}(x)-y(x)\right|\leqslant K\varepsilon$，其中 $K=\frac{1}{|\lambda|}E_n(\lambda h^n)$.

注：定理 10 证明方法同定理 9，在此略去。

3.2 非线性微分方程的情形

现在来讨论分数阶非线性微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性，过程和线性的一样，先讨论 $0<n<1$ 的情形，然后给出 $n>1$ 时的结果。

定理 11 设 $0<n<1$，$\lambda\in\mathbb{R}$ 且 $\lambda\neq0$，如果函数 $f(x)$ 是 $G=[0,h]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 上的连续函数，且关于第二变元满足 Lipschitz 条件，即 $\left|f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x))\right|\leqslant L\left|y_1(x)-y_2(x)\right|$，其中，$L>0$ 为常数，对任意的 $\varepsilon>0$，若有 $y_{\varepsilon}(x)\in A[0,h]$ 使得 $\left|D_{*,0}^{n}y_{\varepsilon}(x)-\lambda y_{\varepsilon}(x)-f(x,y_{\varepsilon}(x))\right|\leqslant\varepsilon$，则存在 $D_{*,0}^{n}y(x)=\lambda y(x)+f(x,y(x))$ 的解 $y(x):[0,h]\in\mathbb{R}$，使得

$$\left|y(x)-y_{\varepsilon}(x)\right|\leqslant K\varepsilon$$

成立，其中，$K=\frac{h^n}{\Gamma(n+1)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[M\Gamma(n)\right]^k}{\Gamma(kn)\Gamma(n+1)}h^{(k+1)n}\mathrm{B}(n,kn)$.

证明：由
$$\left|D_{*,0}^{n}y_{\varepsilon}(x)-\lambda y_{\varepsilon}(x)-f(x,y_{\varepsilon}(x))\right|\leqslant\varepsilon, \tag{4}$$
可知
$$D_{*,0}^{n}y_{\varepsilon}(x)\leqslant\lambda y_{\varepsilon}(x)+f(x,y_{\varepsilon}(x))+\varepsilon. \tag{5}$$
对不等式两边同时积分，
$$y_{\varepsilon}(x)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{D^{k}f(0)}{k!}x^{k}\leqslant\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-1}\left[\lambda y_{\varepsilon}(t)+f_{\varepsilon}(t,y_{\varepsilon}(t))\right]\mathrm{d}t+\frac{\varepsilon x^{n}}{\Gamma(n+1)}.$$
又由于 $0<n<1$，
$$y_{\varepsilon}(x)\leqslant y_{0}+\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-1}[\lambda y_{\varepsilon}(t)+f_{\varepsilon}(t,y_{\varepsilon}(t))]\mathrm{d}t+\frac{\varepsilon x^{n}}{\Gamma(n+1)}. \tag{6}$$
而由定理 8 和分数阶微分方程解的存在唯一性定理可知
$$y(x)=y_{0}+\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-1}[\lambda y(t)+f(t,y(t))]\mathrm{d}t. \tag{7}$$
由式（6）、式（7）可得
$$y_{\varepsilon}(x)-y(x)\leqslant\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-1}\{\lambda[y_{\varepsilon}(t)-y(t)]+f(t,y_{\varepsilon}(t))-f(t,y(t))\}\mathrm{d}t+\frac{\varepsilon x^{n}}{\Gamma(n+1)}. \tag{8}$$
由
$$D_{*,0}^{n}y_{\varepsilon}(x)\geqslant\lambda y_{\varepsilon}(x)+f(x,y_{\varepsilon}(x))-\varepsilon,$$
可得
$$y_{\varepsilon}(x)\geqslant y_{0}+\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-1}[\lambda y(t)+f(t,y(t))]\mathrm{d}t-\frac{\varepsilon x^{n}}{\Gamma(n+1)},$$
则
$$y(x)-y_{\varepsilon}(x)\leqslant\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-1}\{\lambda[y(t)-y_{\varepsilon}(t)]+f(t,y(t))-f(t,y_{\varepsilon}(t))\}\mathrm{d}t+\frac{\varepsilon x^{n}}{\Gamma(n+1)}. \tag{9}$$
由式（8）、式（9）可得
$$\begin{aligned}\left|y(x)-y_{\varepsilon}(x)\right|&\leqslant\frac{\varepsilon x^{n}}{\Gamma(n+1)}+\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-1}\{\lambda[y(t)-y_{\varepsilon}(t)]+f(t,y(t))-f(t,y_{\varepsilon}(t))\}\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{\varepsilon x^{n}}{\Gamma(n+1)}+\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-1}\left|\lambda\right|\left|y(t)-y_{\varepsilon}(t)\right|+\left|f(t,y(t))-f(t,y_{\varepsilon}(t))\right|\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{\varepsilon x^{n}}{\Gamma(n+1)}+\frac{\left|\lambda\right|+L}{\Gamma(n)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-1}\left|(y(t)-y_{\varepsilon}(t)\right|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
令 $M=\left|\lambda\right|+L$，根据定理 5 分数阶 Gronwall 不等式得
$$\begin{aligned}\left|(y(t)-y_{\varepsilon}(t)\right|&\leqslant\frac{\varepsilon x^{n}}{\Gamma(n+1)}+\int_{0}^{x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[M\Gamma(n)]^{k}}{\Gamma(kn)}(x-t)^{kn-1}\frac{\varepsilon t^{n}}{\Gamma(n+1)}\mathrm{d}t\\&=\varepsilon\left[\frac{x^{n}}{\Gamma(n+1)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[M\Gamma(n)]^{k}}{\Gamma(kn)\Gamma(n+1)}\int_{0}^{x}t^{n}(x-t)^{kn-1}\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon\left[\frac{x^n}{\Gamma(n+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[M\Gamma(n)]^k}{\Gamma(kn)\Gamma(n+1)}x^{(k+1)n}\int_0^1 s^n(1-s)^{kn-1}\mathrm{d}s\right] \\
&= \varepsilon\left[\frac{x^n}{\Gamma(n+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[M\Gamma(n)]^k}{\Gamma(kn)\Gamma(n+1)}x^{(k+1)n}\mathrm{B}(n,kn)\right] \\
&\leqslant \varepsilon\left[\frac{h^n}{\Gamma(n+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[M\Gamma(n)]^k}{\Gamma(kn)\Gamma(n+1)}h^{(k+1)n}\mathrm{B}(n,kn)\right].
\end{aligned}
$$

故 $K = \frac{h^n}{\Gamma(n+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[M\Gamma(n)]^k}{\Gamma(kn)\Gamma(n+1)}h^{(k+1)n}\mathrm{B}(n,kn)$，其中 $\mathrm{B}(\,,\,)$ 为贝塔函数。

定理 12 设 $n>1$，$\lambda\in\mathbb{R}$ 且 $\lambda\neq 0$，如果函数 $f(x)$ 是 $G=[0,h]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 上的连续函数，且关于第二变元满足 Lipschitz 条件即 $|f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x))|\leqslant L|y_1(x)-y_2(x)|$，其中，$L>0$ 为常数，若有 $y_\varepsilon(x)\in A[0,h]$，使得对任意的 $\varepsilon>0$ 有 $\left|D_{*,0}^n y_\varepsilon(x)-\lambda y_\varepsilon(x)-f(x,y_\varepsilon(x))\right|\leqslant\varepsilon$，则存在 $D_{*,0}^n y(x)=\lambda y(x)+f(x,y(x))$ 的解 $y(x)\in A[0,h]$，使得

$$|y(x)-y_\varepsilon(x)|\leqslant K\varepsilon,$$

对每一个 $x\in[0,h]$，其中，$K = \frac{h^n}{\Gamma(n+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[M\Gamma(n)]^k}{\Gamma(kn)\Gamma(n+1)}h^{(k+1)n}\mathrm{B}(n,kn)$.

注：定理 12 的证明方法与定理 11 相同，在此略去。

4 结论

对一类分数阶微分方程讨论其 Hyers-Ulam 稳定性，由于分数阶在实际应用中也有很大的作用，因此在研究某些微分方程不等式时不再局限于整数阶。在讨论分数阶性质时，可以先讨论阶数 $0<n<1$ 的情形，再推广到 $n>1$ 的情形。本文的方法和结论可以推广到讨论其他类型的分数阶微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性。

[参考文献] (References)

[1] 林永华. 分数阶常微分方程组的高阶近似及其应用[D]. 厦门：厦门大学，2008.
LIN Y H. Higher order approximation of fractional ordinary differential equations and its application[D]. Xiamen: Xiamen University, 2008. (in Chinese)

[2] DAFTARDAR-GEJJI V, JAFARI H. Analysis of a system of nonautonomous fractional differential equation involving Caputo derivatives[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 328(2): 1026-1033.

[3] DIETHELM K, FREED A D. On the solution of nonlinear fractional-order differential equations used in the modeling of viscoplasticity[M]//KEIL F, MACKENS W, VOβ H, et al. Scientific Computing in Chemical Engineering II. Berlin Heidelberg: Springer, 1999: 217-224.

[4] FORD N J, SIMPSON A C. The numberical solution of fractional differential equations: speed versus accuracy[J]. Numerical Algorithms, 2001, 26(4): 333-346.

[5] 张宏伟，呼青英. 分数阶微分方程解关于参数的连续依赖性[J]. 生物数学学报，2007，22(5)：919-922.
ZHANG H W, HU Q Y. The dependence of solution on parameters for fractional differential equation[J]. Journal of Biomathematics, 2007, 22(5): 919-922. (in Chinese)

[6] YE H P, GAO J M, DING Y S. A generalized Gronwall inequality and application to a fractional differential equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 328(2): 1075-1081.

[7] DELBOSCO D, RODINO L. Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1996, 204(2): 609-625.
[8] LIN S Y. Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2013, 2013: 549.
[9] ULAM S M. Problems in modern mathematics[M]. New York: Science Editions, 1960.
[10] HYERS D H. On the stability of the liner functional equation[J]. Proc. Natl. Acad. Sci., 1941, 27(4): 222-224.
[11] HYERS D H, ISAC G, RASSIAS T M. Stability of functional equations in several variables birkhauser[M]. Boston: Birkhäuser Boston, 1998.
[12] RASSIAS T M. On the stability of the linear mapping in a Banach space[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, 72: 297-300.
[13] OBLOZA M. Hyers stability of the liner differential equation[J]. Rocznik Nauk. Dydakt. Prace Mat., 1993, 13: 259-270.
[14] OBLOZA M. Connections between Hyers and Lyapunov stability of the ordinary differential equations[J]. Rocznik Nauk. Dydakt. Prace Mat., 1997, 14: 141-146.
[15] ALSINA C, GER R. On some inequalities and stability results related to the exponential function[J]. Journal of Inequalities and Applicetions, 1998, 2: 373-380.
[16] JUNG S M, MIN S. On approximate Euler differential equations[J]. Abstr. Appl. Anal., 2009: 537963.
[17] RUS I A. Ulam stability of the ordinary differential equations in a Banach space[J]. Carpathian J. Math., 2010, 26(1): 103-107.
[18] WANG G, ZHOU M, SUN L. Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order[J]. Applied Mathematics Letters, 2008, 21(10): 1024-1028.
[19] ALQIFIARY Q H, JUNG S M. On the Hyers-Ulam stability of differential equations of second order[J]. Abstract and Applied Analysis, 2014: 483707.
[20] MURA T, MIYAJIMA S, TAKAHASI S E. A characterization of Hyers-Ulam stability of first order linear differential operators[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 286(1): 136-146.
[21] JUNG S M. Hyers-Ulam stability of a stystem of first order linear differential equations with constant coefficients[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 320(2): 549-561.
[22] CIMPEAN D S, POPA D. On the stability of the linear differential equation of higher order with constant coefficients[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 217(8): 4141-4146.
[23] MIURA T, MIYAJIMA S, TAKHASI S. Hyers-Ulam stability of linear differential operator with constant coefficients[J]. Mathematische Nathrichten, 2003, 258(1): 90-96.
[24] POPA D, RASA I. On the Hyers-Ulam stability of the linear differential equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Application, 2011, 381(2): 530-537.
[25] ALQIFIARY Q H, JUNG S M. Laplace transform and generalized Hyers-Ulam stability of linear differential equations[J]. Electronic Journal of Dierential Equations, 2014, 80(1): 1-11.
[26] REZAEI H, JUNG S M, RASSIAS T M. Laplace transform and Hyers-Ulam stability of linear differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 403(1): 244-251.
[27] VAEZI H, SHAKOORY H. Hyers-Ulam stability of a linear differential equation of third order[J]. Int. J. Appl. Math. Stat., 2013, 31(1): 79-84.
[28] MORTICI C, RASSIAS T M, JUNG S M. The inhomogeneous Euler equation and its Hyers-Ulam stability[J]. Appl. Math. Lett, 2015, 40: 23-28.
[29] DIETHELM K. The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type[M]. Verlag: Springer, 2010.