highlights.paper.edu.cn
中国科技论文在线精品论文
Highlights of Sciencepaper Online

一类对合幂等元半环的结构

冯军庆，梁国宏

（空军工程大学理学院，西安 710051）

摘要：利用半环上的格林关系研究满足给定恒等式的对合幂等元半环，运用半环的对合单演双半格刻画了该类半环的结构。结果表明，在一定条件下，对合幂等元半环满足给定的恒等式当且仅当它是矩形带半环的对合单演双半格。

关键词：代数学；幂等元半环；对合幂等元半环；簇；单演双半格

中图分类号：O152.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1674-2850(2017)07-0733-04

Structrue of the class of idempotent semiring with involution

FENG Junqing, LIANG Guohong

(*College of Science*, *Air Force Engineering University*, *Xi'an* 710051, *China*)

Abstract: In this paper, a class of idempotent semirings with involution which satisfy the identity is discussed by using the Green-relation in idempotent semirings. The structure of these idempotent semirings are obtained through the involutorial monobisemilattice of semirings. Finally, we show that idempotent semirings with involution satisfy the identity if and only if they are the involutorial monobisemilattice of semirings which additive reduct is rectangular band.

Key words: algebra; idempotent semiring; idempotent semiring with involution; variety; monobisemilattice

0 引言

幂等元半环是半环代数理论研究中十分活跃的领域。SEN 等[1]研究了满足恒等式 $x+xy+x\approx x+yx+x\approx x$ 的幂等元半环簇的一个子簇 $\overset{+}{R}\circ D$. 对合半环在代数学的不同领域和计算机科学中占有重要地位。近年来，DOLINKA 等[2~5]对对合半群和对合半环进行了大量研究。本文在幂等元半环上引入对合运算，研究满足恒等式 $x+y+x\approx xy$ 的对合幂等元半环，并运用半环的对合单演双半格刻画这类半环的结构。

1 预备知识

若非空集合 S 上装有两个二元运算加法（$+$）和乘法（$\cdot$），其中 $(S,+)$ 和 $(S,\cdot)$ 为半群，且满足乘法对加法的分配律，即 $\forall\, a,b,c\in S$， $a(b+c)=ab+ac$， 则称 $(S,+,\cdot)$ 为半环。以下在不引起混淆的情况下，半环 $(S,+,\cdot)$ 简写为 S .

幂等元半环指 $(S,+,\cdot)$ 为半环，且 $\forall\, a\in S$， $a+a=a$， $aa=a$.

含对合 $*$ 运算的半环 $(S,+,\cdot,*)$ [5]指 $(S,+,\cdot)$ 为半环，且有下式成立：

$$\forall a,b\in S，(a+b)^*=b^*+a^*，(ab)^*=b^*a^*，(a^*)^*=a\,.$$

基金项目：国家自然科学基金（61402364）

作者简介：冯军庆（1983—），男，讲师，主要研究方向：半群代数理论. E-mail: fjq1983@163.com

即$*$为S上的反自同构，把含对合$*$运算的幂等元半环简称为对合幂等元半环[5]。

簇是关于同态象、直积和子代数封闭的代数类。所有幂等元半环形成的类是满足一组给定等式的代数类，因而它就是一个簇。双半格是满足恒等式$x+y\approx y+x$，$xy\approx yx$的幂等元半环，单演双半格是满足恒等式$x+y\approx xy$的双半格，左零半环是满足恒等式$x+y\approx xy\approx x$的半环。为叙述方便，本文用I表示对合幂等元半环簇，用M表示对合单演双半格簇，用Lz表示对合左零带簇。两个幂等元半环类V和W的Mal'cev积记为$V\circ W$，它是满足条件的幂等元半环S的全体：S上存在同余ρ使得$S/\rho\in W$和每个ρ-类均为S的子代数，且均在V中。

若$(S,+,\cdot)$为半环，则$\overset{+}{D}$和$\overset{\bullet}{D}$分别表示加法和乘法半群上的格林关系，若$S\in I$，易得$\overset{+}{D}$是S上的同余关系，而$\overset{\bullet}{D}$不是S上的同余关系，但$\overset{+}{D}$和$\overset{\bullet}{D}$分别是$(S,+)$和$(S,\cdot)$上的最小半格同余。

本文未涉及的概念和术语参见文献[6]～[7]。

2 满足恒等式$x+y+x\approx xy$的对合幂等元半环

本节主要研究满足恒等式$x+y+x\approx xy$的对合幂等元半环的结构问题，首先给出半环的对合单演双半格[2]。

若$(Y,+,\cdot,*)$为对合单演双半格，$\{S_\alpha\mid\alpha\in Y\}$为一簇两两不交的半环，设$\forall\alpha,\beta\in Y$，若$\alpha\leqslant\beta\Leftrightarrow\alpha+\beta=\beta$，则有同态映射$\varPhi_{\alpha,\beta}:S_\alpha\to S_\beta$，$*$为$\bigcup\limits_{\alpha\in Y}S_\alpha$上的双射，且满足如下条件：

1）$\forall\alpha\in Y$，$\varPhi_{\alpha,\alpha}$为S_α上的单位映射。

2）$\forall\alpha,\beta,\gamma\in Y$，若$\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$，则$\varPhi_{\alpha,\beta}\varPhi_{\beta,\gamma}=\varPhi_{\alpha,\gamma}$.

3）$\forall\alpha\in Y$，$*|_{S_\alpha}:S_\alpha\to S_{\alpha^*}$是反同构（特别地，若$\alpha^*=\alpha$，则$*|_{S_\alpha}$是$S_\alpha$上的反自同构）。

4）$\forall\alpha,\beta\in Y$，$\alpha\leqslant\beta$，$a\varPhi_{\alpha^*,\beta^*}=(a^*\varPhi_{\alpha,\beta})^*$，$a\in S_{\alpha^*}$.

在$S=\bigcup\limits_{\alpha\in Y}S_\alpha$上定义加法与乘法如下：

$$a+b=a\varPhi_{\alpha,\alpha+\beta}+b\varPhi_{\beta,\alpha+\beta}，\quad ab=a\varPhi_{\alpha,\alpha+\beta}b\varPhi_{\beta,\alpha+\beta},$$

称上述代数结构为半环S_α的对合单演双半格，并记为$[Y,S_\alpha,\varPhi_{\alpha,\beta},*]$.

定理 1 若S为$\{S_\alpha\mid\alpha\in Y\}$的对合单演双半格，且结构同态$\varPhi_{\alpha,\beta}$是单同态，在$S$上定义二元关系为$a\theta b\Leftrightarrow a\varPhi_{\alpha,\alpha+\beta}=b\varPhi_{\beta,\alpha+\beta}$，$a\in S_\alpha$，$b\in S_\beta$，则$\theta$为$S$上的同余，且$S$为$Y$与$S/\theta$的次直积。

证明：θ的自反性显然成立，下证传递性和相容性。

若$a\in S_\alpha$，$b\in S_\beta$，$c\in S_\gamma$，且$a\theta b,b\theta c$，则$a\varPhi_{\alpha,\alpha+\beta}=b\varPhi_{\beta,\alpha+\beta}$，$b\varPhi_{\beta,\beta+\gamma}=c\varPhi_{\gamma,\beta+\gamma}$，从而有

$$(a\varPhi_{\alpha,\alpha+\beta})\varPhi_{\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma}=(b\varPhi_{\beta,\alpha+\beta})\varPhi_{\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma},\ (b\varPhi_{\beta,\beta+\gamma})\varPhi_{\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma}=(c\varPhi_{\gamma,\beta+\gamma})\varPhi_{\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma},$$

即
$$a\varPhi_{\alpha,\alpha+\beta+\gamma}=b\varPhi_{\beta,\alpha+\beta+\gamma},\quad b\varPhi_{\beta,\alpha+\beta+\gamma}=c\varPhi_{\gamma,\alpha+\beta+\gamma},$$

因此，
$$a\varPhi_{\alpha,\alpha+\beta+\gamma}=c\varPhi_{\gamma,\alpha+\beta+\gamma}，\quad (a\varPhi_{\alpha,\alpha+\gamma})\varPhi_{\alpha+\gamma,\alpha+\beta+\gamma}=(c\varPhi_{\gamma,\alpha+\gamma})\varPhi_{\alpha+\gamma,\alpha+\beta+\gamma}.$$

又$\varPhi_{\alpha+\gamma,\alpha+\beta+\gamma}$是单同态，故$a\varPhi_{\alpha,\alpha+\gamma}=c\varPhi_{\gamma,\alpha+\gamma}$，从而$a\theta c$.

若$a\theta b$，则$a\varPhi_{\alpha,\alpha+\beta}=b\varPhi_{\beta,\alpha+\beta}$. 记$T(x_1,x_2)=x_1+x_2$或$x_1x_2$，则

$$
\begin{aligned}
T(a,c)\Phi_{\alpha+\gamma,\alpha+\beta+\gamma} &= T(a\Phi_{\alpha,\alpha+\gamma}, c\Phi_{\gamma,\alpha+\gamma})\Phi_{\alpha+\gamma,\alpha+\beta+\gamma} \\
&= T(a\Phi_{\alpha,\alpha+\gamma}\Phi_{\alpha+\gamma,\alpha+\beta+\gamma}, c\Phi_{\gamma,\alpha+\gamma}\Phi_{\alpha+\gamma,\alpha+\beta+\gamma}) = T(a\Phi_{\alpha,\alpha+\beta+\gamma}, c\Phi_{\gamma,\alpha+\beta+\gamma}) \\
&= T(a\Phi_{\alpha,\alpha+\beta}\Phi_{\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma}, c\Phi_{\gamma,\alpha+\beta+\gamma}) = T(b\Phi_{\beta,\alpha+\beta}\Phi_{\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma}, c\Phi_{\gamma,\alpha+\beta+\gamma}) \\
&= T(b\Phi_{\beta,\alpha+\beta+\gamma}, c\Phi_{\gamma,\alpha+\beta+\gamma}) = T(b,c)\Phi_{\beta+\gamma,\alpha+\beta+\gamma},
\end{aligned}
$$

从而有

$$T(a,c)\Phi_{\alpha+\gamma,\alpha+\gamma+\beta+\gamma} = T(a,c)\Phi_{\alpha+\gamma,\alpha+\beta+\gamma} = T(b,c)\Phi_{\beta+\gamma,\alpha+\beta+\gamma} = T(b,c)\Phi_{\beta+\gamma,\alpha+\gamma+\beta+\gamma},$$

即 $T(a,c)\theta T(b,c)$．同理可得 $T(c,a)\theta T(c,b)$．

若 $a\theta b$，则 $a\Phi_{\alpha,\alpha+\beta} = b\Phi_{\beta,\alpha+\beta}$，因此 $(a\Phi_{\alpha,\alpha+\beta})^* = (b\Phi_{\beta,\alpha+\beta})^*$，即 $a^*\Phi_{\alpha^*,\alpha^*+\beta^*} = b^*\Phi_{\beta^*,\alpha^*+\beta^*}$，从而 $a^*\theta b^*$．故 θ 为 S 上的同余。

从 S 到 $Y\times S/\theta$ 上作对应 $\pi: a\to(\alpha,a\theta)$，这里 $a\in S_\alpha$．易证 π 为 $S\to Y\times S/\theta$ 上的单同态映射，且 $a^*\to(\alpha^*,a^*\theta)$，又 π 分别为 S 到 Y 和 S/θ 上的满同态，故 S 为 Y 与 S/θ 的次直积。

对于对合幂等元半环 S 而言，$\overset{+}{D}$ 为 S 上的同余关系，且 $\overset{+}{D}$ 为 $(S,+)$ 上的最小半格同余。那对于满足恒等式 $x+y+x\approx xy$ 的对合幂等元半环来说，$\overset{+}{D}$ 又是 S 上的什么同余呢？这是下面要考虑的问题。

定理 2 若 S 为满足 $x+y+x\approx xy$ 的对合幂等元半环，则 $\overset{+}{D}$ 为 S 上的单演双半格同余。

证明：由于 $\overset{+}{D}$ 为 S 上的同余，且为 $(S,+)$ 上的半格同余。因为 S 为满足 $x+y+x\approx xy$ 的对合幂等元半环，所以 $\forall a,b\in S$，有 $a+b+a=ab$，因此 $a+ab+a=ab$，

$$
\begin{aligned}
a+b+ab+a+b &= a+b+a+b+a+a+b = a+b, \\
ab+a+b+ab &= a+ab+a+a+b+a+ab+a = a+ab+a+b+a+ab+a \\
&= a+ab+a+b+a+a(b+a) = a+ab+a+(b+a+a)(b+a) \\
&= a+ab+a+b+a = a(a+b)+a+b+a \\
&= (a+a+b)(a+b)+a = a+b+a = ab.
\end{aligned}
$$

故 $(a+b)\overset{+}{D}(ab)$，又 $\overset{+}{D}$ 为 $(S,+)$ 上的半格同余，得 $(a+b)\overset{+}{D}(b+a)\overset{+}{D}(ab)\overset{+}{D}(ba)$，从而 $\overset{+}{D}$ 为 S 上的单演双半格同余。

下面利用半环的对合单演双半格研究满足恒等式 $x+y+x\approx xy$ 的对合幂等元半环的结构。

定理 3 若 S 为满足恒等式 $x+y+x\approx xy$ 的对合幂等元半环，则 $S\in[\overset{+}{R}\circ M]\cap\overset{+}{N}B$ 当且仅当 S 为 $\overset{+}{R}$ 中半环的对合单演双半格。

证明：若 S 为 $\overset{+}{R}$ 中半环的对合单演双半格。而对合正规带是矩形带的对合强半格，则 $S\in\overset{+}{N}B$，又 $S\in\overset{+}{R}\circ M$，从而 $S\in[\overset{+}{R}\circ M]\cap\overset{+}{N}B$.

若 $S\in[\overset{+}{R}\circ M]\cap\overset{+}{N}B$，由定理 2 知 $\overset{+}{D}$ 为 S 上的单演双半格同余。记 $S/\overset{+}{D}=M$，S_α 为 S 的每个 $\overset{+}{D}$ 类，这里 $\alpha\in M$，$S_\alpha\in\overset{+}{R}$，则 S 为半环 S_α 的单演双半格。

对 $\alpha,\beta\in M$，$\alpha\leqslant\beta$，定义半环 $S_\alpha\to S_\beta$ 上的对应 $\Phi_{\alpha,\beta}$ 为

$$a \in S_\alpha,\ b \in S_\beta,\ a\Phi_{\alpha,\beta} = a + b + a,$$

由 $(S,+)$ 是正规带，易验证 $\Phi_{\alpha,\beta}$ 是映射，且此映射不依赖于 b. $\forall a,b \in S_\alpha$, 由于 $S \in \overset{+}{N}B$, 故

$$(a+b)\Phi_{\alpha,\beta} = a+b+g+a+b = a+g+a+b+g+b = a\Phi_{\alpha,\beta} + b\Phi_{\alpha,\beta},$$

从而 $\Phi_{\alpha,\beta}$ 是加法同态，

$$(ab)\Phi_{\alpha,\beta} = ab+g+ab = a(b+g+b)+gg+a(b+g+b) = a(b+g+b)+(g+b+g)(g+b+g)+a(b+g+b)$$
$$= a(b+g+b)+g(b+g+b)+a(b+g+b) = (a+g+a)(b+g+b) = a\Phi_{\alpha,\beta}b\Phi_{\alpha,\beta}.$$

因此，$\Phi_{\alpha,\beta}$ 是半环同态，$a\Phi_{\alpha,\alpha} = a+b+a = a$，$b \in S_\alpha$，若 $\alpha \leqslant \beta$，$\beta \leqslant \gamma$，设 $a \in S_\alpha$，$b \in S_\beta$，$c \in S_\gamma$，则

$$a\Phi_{\alpha,\beta}\Phi_{\beta,\gamma} = (a\Phi_{\alpha,\beta})\Phi_{\beta,\gamma} = (a+b+a)\Phi_{\beta,\gamma} = a+b+a+c+a+b+a = a+b+c+b+a = a\Phi_{\alpha,\gamma},$$

故 $\Phi_{\alpha,\beta}$ 满足条件 1）与 2）。又 $\forall a \in S_\alpha$，$b \in S_\beta$，$r \in S_{\alpha+\beta}$，则

$$a+b = (a+b)\Phi_{\alpha+\beta,\alpha+\beta} = a+b+r+a+b = a+b+r+r+a+b = a+r+a+b+r+b = a\Phi_{\alpha,\alpha+\beta} + b\Phi_{\beta,\alpha+\beta},$$

$$a\Phi_{\alpha,\alpha+\beta}b\Phi_{\beta,\alpha+\beta} = (a+r+a)(b+r+b) = ab+ar+ab+rb+r+rb+ab+ar+ab,$$

$$(ab)\Phi_{\alpha\beta,\alpha+\beta} = (ab)\Phi_{\alpha+\beta,\alpha+\beta} = ab(ar+ab+rb+r+rb+ab+ar \in S_{\alpha+\beta}).$$

$\forall a \in S_{\alpha^*}$，$b \in S_\beta$，$(a^*\Phi_{\alpha,\beta})^* = (a^*+b^*+a^*)^* = a+b+a$，又 $a\Phi_{\alpha^*,\beta^*} = a+b+a$ （这里 $b \in S_{\beta^*}$），所以 $a\Phi_{\alpha^*,\beta^*} = (a^*\Phi_{\alpha,\beta})^*$. 因此，$S$ 为 $\overset{+}{R}$ 中半环的对合单演双半格。

3 结论

本文研究了满足恒等式 $x+y+x \approx xy$ 的对合幂等元半环，运用半环的对合单演双半格刻画了这类半环的结构，最后得到了 S 满足恒等式 $x+y+x \approx xy$ 当且仅当 S 是 $\overset{+}{R}$ 中半环的对合单演双半格。

[参考文献] (References)

[1] SEN M K, GUO Y Q, SHUM K P. A class of idempotent semirings[J]. Semigroup Forum, 2000, 60(3): 351-367.
[2] DOLINKA I, VINCIC M. Involutorial plonka sums[J]. Periodica Mathematica Hungarica, 2003, 46(1): 17-31.
[3] DOLINKA I. All varieties of normal bands with involution[J]. Periodica Mathematica Hungarica, 2000, 40(2): 109-122.
[4] DOLINKA I. Idempotent distributive semirings with involution[J]. International Journal of Algebra and Computation, 2003, 13(5): 597-625.
[5] DOLINKA I. On the lattice of varieties of involution semigroups[J]. Semigroup Forum, 2001, 62(3): 438-459.
[6] ZHAO X Z, GUO Y Q, SHUM K P. Sturdy frame of type (2,2) algebras and their application to semirings[J]. Fundamenta Mathematicae, 2003, 179(1): 68-81.
[7] HOWIE J M. Fundamentals of semigroup theory[M]. Oxford: Clarendon Press, 1995.