双参数交替法求解非对称代数 Riccati 方程

刘慧敏，郭晓霞

（中国海洋大学数学科学学院，山东青岛 266100）

摘要：非对称代数 Riccati 方程的最小非负解求解问题是数值代数的一个重要课题。本文将求解最小非负解的单参数交替线性隐式迭代（alternating linear implicit iteration，ALI）法和多重线性隐式迭代（multiple linear implicit iteration，MLI）法的思想相结合，引入双参数，提出两种不同的求解最小非负解的双参数交替多重线性隐式迭代（alternating multiple linear implicit iteration，AMLI）法。数值实验结果表明，这两种算法不论在时间上还是迭代次数上都有一定的提高。本文不仅从理论上证明了这两种方法的单调收敛性，而且通过数值算例验证了这两种方法的优越性。

关键词：计算数学；非对称代数 Riccati 方程；最小非负解；双参数交替隐式迭代法；非奇异的 M-矩阵

中图分类号：O241.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1674-2850(2019)01-0018-08

Double parameter alternately methods for nonsymmetric algebraic Riccati equations

LIU Huimin, GUO Xiaoxia

(*School of Mathematical Sciences*, *Ocean University of China*, *Qingdao*, *Shandong* 266100, *China*)

Abstract: To solve the minimal nonnegative solution of the nonsymmetric algebraic Riccati equation is an important problem in numerical algebra. Based on the combination of the single parameter alternating linear implicit iteration (ALI) method and multiple linear implicit iteration (MLI) method in solving the minimal nonnegative solution, two kinds of double parameter alternating multiple linear implicit iteration (AMLI) methods are proposed to solve the minimal nonnegative solution by introducing double parameters. Numerical experiment results show that these two methods are improved in both time and iteration times. It not only proves the monotonic convergence of the two methods in theory, but also shows the superiority of the two methods through numerical examples.

Key words: computational mathematics; nonsymmetric algebraic Riccati equations; the minimal nonnegative solution; double parameter alternating implicit iteration methods; nonsingular M-matrix

0 引言

考虑如下非对称代数 Riccati 方程（NARE）：

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{XCX} - \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{XD} + \boldsymbol{B} = 0, \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 分别为 $m\times m$、$m\times n$、$n\times m$、$n\times n$ 的实矩阵。定义系数矩阵

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & -\boldsymbol{C} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

基金项目：国家自然科学基金（11871444）；中央高校基本科研业务费专项资金（201562012）
作者简介：刘慧敏（1994—），女，硕士研究生，主要研究方向：数值代数
通信联系人：郭晓霞，教授，主要研究方向：数值代数. E-mail: guoxiaoxia@ouc.edu.cn

当 $\boldsymbol{K}$ 为一个非奇异的 M-矩阵或不可约的 M-矩阵时，方程（1）存在唯一的最小非负解[1~3]。该方程是一般形式的非对称代数 Riccati 方程，主要来源于 Wiener-Hopf 分解。除此之外，还有一种非对称代数 Riccati 方程，来源于粒子运输，这类方程的系数具有特殊结构[4]。关于这两种方程的最小非负解存在的理论结果和数值方法有很多，如 GUO 等[5]给出了在 $\boldsymbol{B}>0$、$\boldsymbol{C}>0$、$\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}$ 非奇异的假设条件下，方程（1）最小非负解的存在唯一性及求解的数值方法。2001 年，GUO[1]提出了当 $\boldsymbol{Q}$ 为非奇异的 M-矩阵或不可约的奇异 M-矩阵时，方程（1）存在最小非负解，并证明了最小非负解可由 Schur 分解法、牛顿法和不动点迭代法来求得。

2006 年，GUO 等[6]利用不变子空间的思想，提出了求解非对称代数 Riccati 方程的保结构加倍算法（structure-preserving doubling algorithm，SDA），并证明了该算法单调递增且二次收敛到方程（1）的最小非负解。2012 年，WANG 等[7]根据求解 Sylvester 矩阵方程的双参数交替方向法的思想，在 SDA 的基础上，提出了双参数交替方向的保结构加倍算法（alternating-directional doubling algorithm，ADDA），该算法的收敛速度比 SDA 要快，但存在大量矩阵求逆。2017 年，XUE 等[8]应用 GTH-like 方法即 LU 分解法求 M-矩阵的逆矩阵，得到了 ADDAacc 算法，在一定程度上提高了计算精度。

BAI 等[9]基于不动点迭代的思想提出了求解方程（1）的 ALI 法。为减少求逆矩阵的次数，LU 等[10]提出了 MLI 法，但是该方法没有用到交替的思想。本文将这两种思想结合在一起，引入双参数，给出两种双参数交替多重线性隐式迭代（AMLI1 和 AMLI2）法。

1 基本符号与引理

给定矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}],\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$，如果 $[\boldsymbol{A}]_{ij}\geqslant[\boldsymbol{B}]_{ij}$（$[\boldsymbol{A}]_{ij}>[\boldsymbol{B}]_{ij}$）对所有的 (i,j) 都成立，即 $a_{ij}\geqslant b_{ij}$（$a_{ij}>b_{ij}$），则称 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}$（$\boldsymbol{A}>\boldsymbol{B}$）. 对于一个矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，如果它的每一个元素 $a_{ij}\geqslant 0$（$a_{ij}>0$），则称这个矩阵为非负矩阵（正矩阵）。任意一个实方阵 $\boldsymbol{A}$，若满足非对角元均为非正数，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 Z-矩阵，显然，任意一个 Z-矩阵都可以写成 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 的形式，其中 $\boldsymbol{B}\geqslant\boldsymbol{0}$，如果 $s>\rho(\boldsymbol{B})$，则称 Z-矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的 M-矩阵，其中 $\rho(\boldsymbol{B})$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径。

引理 1 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是 Z-矩阵，则下列命题等价：

1） $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的 M-矩阵；

2） $\boldsymbol{A}^{-1}>0$；

3）存在 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^{n}$，满足 $\boldsymbol{v}>0$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}>0$；

4） $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值都有正的实部。

引理 2 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个非奇异的 M-矩阵，如果 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足

$$b_{ii}\geqslant a_{ii},\ a_{ij}\leqslant b_{ij}\leqslant 0,\ i\neq j,\ 1\leqslant i,j\leqslant n,$$

则 $\boldsymbol{B}$ 也是非奇异的 M-矩阵，特别地，对于任意的正实数 θ，$\boldsymbol{B}=\theta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 也是一个非奇异的 M-矩阵。

引理 3 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是非奇异的矩阵，满足 $\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant\boldsymbol{B}^{-1}$.

引理 4 如果 $\boldsymbol{K}$ 是一个非奇异的 M-矩阵，则方程（1）有最小非负解 $\boldsymbol{S}$ 使得矩阵 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}$ 都是非奇异的 M-矩阵，而且方程（1）的任意解 $\boldsymbol{S}^*$，如果满足矩阵 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}^*$ 与 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{C}$ 都是非奇异的 M-矩阵，则必须满足 $\boldsymbol{S}^*=\boldsymbol{S}$.

2 双参数交替多重线性隐式迭代法

取$\alpha \geqslant 0$，方程（1）等价于

$$[\alpha \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{XC})]\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{B} \tag{3}$$

或

$$\boldsymbol{X}[\alpha \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{CX})] = (\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}. \tag{4}$$

根据式（3）和式（4），由文献[9]得如下ALI算法：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_0 = 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}，\ s \geqslant 1，k = 0,1,2,\cdots \\
&[\alpha \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{X}_k \boldsymbol{C})]\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2}}(\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{B}, \\
&\boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2}}[\alpha \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_k)] = \boldsymbol{X}_k(\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{B}.
\end{aligned} \tag{5}$$

LU等[10]在此基础上应用Shamanskii技术得出MLI算法：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_0 = 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}，s \geqslant 1，1 \leqslant q \leqslant s-1，k = 0,1,2,\cdots \\
&\boldsymbol{X}_{k,1} = [\alpha \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C})]^{-1}[\boldsymbol{X}_{k,0}(\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{B}], \\
&\boldsymbol{X}_{k,q+1} = [\alpha \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C})]^{-1}[\boldsymbol{X}_{k,q}(\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{B}], \\
&\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{X}_{k,s},
\end{aligned} \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{X}_{k,0} = \boldsymbol{X}_k$.

本文将ALI算法和MLI算法的思想相结合，引入了双参数，得到两种双参数交替多重线性隐式迭代法（AMLI1算法和AMLI2算法）。

AMLI1算法：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_0 = 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}，s \geqslant 1，1 \leqslant q \leqslant s-1，k = 0,1,2,\cdots \\
&\boldsymbol{X}_{k,\frac{1}{2}} = [\alpha \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C})]^{-1}[\boldsymbol{X}_{k,0}(\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{B}], \\
&\boldsymbol{X}_{k,1} = [(\beta \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_{k,\frac{1}{2}} + \boldsymbol{B}][\beta \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{k,\frac{1}{2}})]^{-1}, \\
&\boldsymbol{X}_{k,q+\frac{1}{2}} = [\alpha \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C})]^{-1}[\boldsymbol{X}_{k,q}(\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{B}], \\
&\boldsymbol{X}_{k,q+1} = [(\beta \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_{k,q+\frac{1}{2}} + \boldsymbol{B}][\beta \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{k,\frac{1}{2}})]^{-1}, \\
&\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{X}_{k,s}.
\end{aligned} \tag{7}$$

AMLI2算法：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_0 = 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}，s \geqslant 1，1 \leqslant q \leqslant s-1，k = 0,1,2,\cdots \\
&\boldsymbol{X}_{k,1} = [\alpha \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C})]^{-1}[\boldsymbol{X}_{k,0}(\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{B}], \\
&\boldsymbol{X}_{k,q+1} = [\alpha \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{X}_{k,q}\boldsymbol{C})]^{-1}[\boldsymbol{X}_{k,q}(\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{B}], \\
&\boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},0} = \boldsymbol{X}_{k,s}, \\
&\boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},1} = [(\beta \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},0} + \boldsymbol{B})][(\beta \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},0})]^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&X_{k+\frac{1}{2},q+1}=[(\beta I-A)X_{k+\frac{1}{2},q}+B][(\beta I+(D-CX_{k+\frac{1}{2},0})]^{-1},\\
&X_{k+1,0}=X_{k+\frac{1}{2},s},\\
&X_{k+\frac{1}{2}}=X_{k+\frac{1}{2},0},\quad X_{k+1}=X_{k+1,0},
\end{aligned}\tag{8}$$

其中， $X_{k,0}=X_k$.

3 收敛性分析

由于 AMLI1 算法和 AMLI2 算法的收敛性证明基本一致，因此本文只给出了 AMLI2 算法的收敛性证明。

引理 5[10] 假设 S 是方程（1）的最小非负解，矩阵序列 $\{X_{k,q}\}$ 是由 AMLI2 算法生成的，则有下列等式成立：

1） $[\alpha I+(A-X_{k,0}C)](X_{k,1}-S)=(X_{k,0}-S)[\alpha I-(D-CS)]$,

2） $[\alpha I+(A-X_{k,0}C)](X_{k,1}-X_{k,0})=R(X_{k,0})$,

3） $R(X_{k,1})=(X_{k,1}-X_{k,0})[\alpha I-(D-CX_{k,1})]$,

4） $(X_{k+\frac{1}{2},1}-S)[\beta I+(D-CX_{k+\frac{1}{2},0})]=[\beta I-(A-SC)](X_{k+\frac{1}{2},0}-S)$,

5） $(X_{k+\frac{1}{2},1}-X_{k+\frac{1}{2},0})[\beta I+(D-CX_{k+\frac{1}{2},0})]=R(X_{k+\frac{1}{2},0})$,

6） $R(X_{k+\frac{1}{2},1})=[\beta I-(A-X_{k+\frac{1}{2},1}C)](X_{k+\frac{1}{2},1}-X_{k+\frac{1}{2},0})$.

引理 6[9] 假设 S 是方程（1）的最小非负解，矩阵序列 $\{X_k\}$ 是由 AMLI2 算法生成的，则有下列等式成立：

1） $[\alpha I+(A-X_kC)](X_{k+\frac{1}{2}}-S)=(X_k-S)[\alpha I-(D-CS)]$,

2） $[\alpha I+(A-X_kC)](X_{k+\frac{1}{2}}-X_k)=R(X_k)$,

3） $R(X_{k+\frac{1}{2}})=(X_{k+\frac{1}{2}}-X_k)[\alpha I-(D-CX_{k+\frac{1}{2}})]$,

4） $(X_{k+1}-S)[\beta I+(D-CX_{k+\frac{1}{2}})]=[\beta I-(A-SC)](X_{k+\frac{1}{2}}-S)$,

5） $(X_{k+1}-X_{k+\frac{1}{2}})[\beta I+(D-CX_{k+\frac{1}{2}})]=R(X_{k+\frac{1}{2}})$,

6） $R(X_{k+1})=[\beta I-(A-X_{k+1}C)](X_{k+1}-X_{k+\frac{1}{2}})$.

定理 1 假设上文定义的矩阵 K 是一个非奇异的 M-矩阵，S 是方程（1）的最小非负解，给定 $X_0=0$，参数 α、β 满足

$$\alpha\geqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{d_{jj}\},\quad \beta\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{a_{ii}\},$$

其中，a_{ii} 、d_{jj} 分别为矩阵 A、D 的第 i、j 个对角元。则当 $0\leqslant X_{k,0}\leqslant S$ 、$R(X_{k,0})\geqslant 0$ 时，对任意 $k\geqslant 0$， AMLI2 算法生成的矩阵序列$\{\boldsymbol{X}_{k,q}\}$（$0\leqslant q\leqslant s$）有定义，并且有

$$0\leqslant \boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{X}_{k,0}\leqslant \boldsymbol{X}_{k,1}\leqslant\cdots\leqslant \boldsymbol{X}_{k,s}=\boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},0}\leqslant \boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},1}\leqslant\cdots\leqslant \boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},s}=\boldsymbol{X}_{k+1}\leqslant \boldsymbol{S},$$

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}_{k,s})\geqslant 0,\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},s})\geqslant 0,\ 1\leqslant q\leqslant s.$$

证明：已知 $\boldsymbol{K}$ 是非奇异的 M-矩阵，主对角元的块矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{D}$ 都是非奇异的 M-矩阵，$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\geqslant 0$，因此，当 $\alpha\geqslant\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{d_{jj}\}$、$\beta\geqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{a_{ii}\}$ 时，矩阵 $\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}\geqslant 0$，$\beta\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\geqslant 0$.

下面对 q 用数学归纳法证明。

由 $0\leqslant \boldsymbol{X}_{k,0}\leqslant \boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{C}\geqslant 0$，可得

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}\leqslant \boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C}\leqslant \boldsymbol{A}.$$

通过引理 2 和引理 4 可知，$\beta\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C})$ 是非奇异的 M-矩阵，根据 AMLI2 算法和引理 5 的 1）、2）、3），可得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_{k,1}-\boldsymbol{X}_{k,0}=[\alpha\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C})]^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}_{k,0}),\\
&\boldsymbol{X}_{k,1}-\boldsymbol{S}=\alpha\boldsymbol{I}+[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C})]^{-1}(\boldsymbol{X}_{k,0}-\boldsymbol{S})[\alpha\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{S})],\\
&\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}_{k,1})=(\boldsymbol{X}_{k,1}-\boldsymbol{X}_{k,0})[\alpha\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{k,1})]
\end{aligned}$$

对于任意 k 都成立。从而有

$$\boldsymbol{X}_{k,1}\geqslant \boldsymbol{X}_{k,0},\ \boldsymbol{X}_{k,1}\leqslant \boldsymbol{S},\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}_{k,1})\geqslant 0.$$

即当 $q=1$ 时结论成立。

假设当 $q\leqslant s-1$ 时结论成立，有

$$0\leqslant \boldsymbol{X}_{k,q-1}\leqslant \boldsymbol{X}_{k,q}\leqslant \boldsymbol{S},\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}_{k,q})\geqslant 0.$$

下面证明 q=s 时结论成立。

根据 AMLI2 算法可得

$$[\alpha\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C})]\boldsymbol{X}_{k,s}=\boldsymbol{X}_{k,s-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})+\boldsymbol{B},$$

即

$$\boldsymbol{X}_{k,s}=[\alpha\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C})]^{-1}[\boldsymbol{X}_{k,s-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})+\boldsymbol{B}],$$

因为 $\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}\geqslant 0$，$\boldsymbol{B}\geqslant 0$，$\boldsymbol{X}_{k,l-1}\geqslant \boldsymbol{X}_{k,l-2}$，从而有

$$\boldsymbol{X}_{k,s}\geqslant[\alpha\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C})]^{-1}[\boldsymbol{X}_{k,s-2}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})+\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{X}_{k,s-1}.$$

另外，

$$\begin{aligned}
&[\alpha\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C})](\boldsymbol{X}_{k,s}-\boldsymbol{S})\\
&=[\alpha\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C})]\boldsymbol{X}_{k,s}-[\alpha\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C})]\boldsymbol{S}\\
&=\boldsymbol{X}_{k,s-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})-\alpha\boldsymbol{S}+\boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}\\
&=\alpha(\boldsymbol{X}_{k,s-1}-\boldsymbol{S})-\boldsymbol{X}_{k,s-1}\boldsymbol{D}+\boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}\\
&\leqslant\alpha(\boldsymbol{X}_{k,s-1}-\boldsymbol{S})-\boldsymbol{X}_{k,s-1}\boldsymbol{D}+\boldsymbol{X}_{k,s-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}\\
&=(\boldsymbol{X}_{k,s-1}-\boldsymbol{S})[\alpha\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{S})]\leqslant 0,
\end{aligned}$$

因此，$0 \leqslant \boldsymbol{X}_{k,s-1} \leqslant \boldsymbol{X}_{k,s} \leqslant \boldsymbol{S}$，即$0 \leqslant \boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},0} = \boldsymbol{X}_{k,s} \leqslant \boldsymbol{S}$.

根据 AMLI 2 算法可得

$$\begin{aligned}
&\alpha \boldsymbol{X}_{k,s} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{k,s} - \boldsymbol{X}_{k,s}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{k,s} \\
&= [\alpha \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{X}_{k,0}\boldsymbol{C})]\boldsymbol{X}_{k,s} - (\boldsymbol{X}_{k,s} - \boldsymbol{X}_{k,0})\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{k,s} \\
&= \boldsymbol{X}_{k,s-1}(\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{X}_{k,s} - \boldsymbol{X}_{k,0})\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{k,s} \\
&= \alpha \boldsymbol{X}_{k,s-1} - \boldsymbol{X}_{k,s-1}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{X}_{k,s} - \boldsymbol{X}_{k,0})\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{k,s}.
\end{aligned}$$

因为$\boldsymbol{X}_{k,s-1} \geqslant \boldsymbol{X}_{k,0}$，可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}_{k,s}) &= \boldsymbol{X}_{k,s}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{k,s} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{k,s} - \boldsymbol{X}_{k,s}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \\
&= \alpha \boldsymbol{X}_{k,s} - \alpha \boldsymbol{X}_{k,s-1} + (\boldsymbol{X}_{k,s} - \boldsymbol{X}_{k,0})\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{k,s} - \boldsymbol{X}_{k,s}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{X}_{k,s-1}\boldsymbol{D} \\
&\geqslant (\boldsymbol{X}_{k,s} - \boldsymbol{X}_{k,s-1})[\alpha \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{k,s})] \geqslant 0,
\end{aligned}$$

所以当$1 \leqslant q \leqslant s$时，$0 \leqslant \boldsymbol{X}_{k,s-1} \leqslant \boldsymbol{X}_{k,s} \leqslant \boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}_{k,s}) \geqslant 0$成立。

由上文已知$\boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},0} = \boldsymbol{X}_{k,s}$，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}_{k,s}) \geqslant 0$，同理可证$0 \leqslant \boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},s-1} \leqslant \boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},s} \leqslant \boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},s}) \geqslant 0$，因此可以得出当满足$0 \leqslant \boldsymbol{X}_{k,0} \leqslant \boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}_{k,0}) \geqslant 0$时，$0 \leqslant \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{X}_{k,0} \leqslant \boldsymbol{X}_{k,1} \leqslant \cdots \leqslant \boldsymbol{X}_{k,s} = \boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},0} \leqslant \boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},1} \leqslant \cdots \leqslant \boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},s} = \boldsymbol{X}_{k+1} \leqslant \boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}_{k,s}) \geqslant 0$，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2},s}) \geqslant 0$，$1 \leqslant q \leqslant s$成立。

定理 2 假设上文定义的矩阵$\boldsymbol{K}$是一个非奇异的M-矩阵，$\boldsymbol{S}$是方程（1）的最小非负解，给定$\boldsymbol{X}_0 = 0$，参数α满足

$$\alpha \geqslant \max\{\max_{1 \leqslant i \leqslant m}\{a_{ii}\}, \max_{1 \leqslant j \leqslant n}\{d_{jj}\}\},$$

其中，a_{ii}、d_{jj}分别为矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{D}$的第i、j个对角元。则 AMLI2 算法生成的矩阵序列$\{\boldsymbol{X}_k\}$有意义，且有如下结论：

1）$\{\boldsymbol{X}_k\}$有界且单调递增，即

$$0 \leqslant \boldsymbol{X}_0 \leqslant \boldsymbol{X}_1 \leqslant \cdots \leqslant \boldsymbol{X}_{k+1} \leqslant \boldsymbol{S};$$

2）$\{\boldsymbol{X}_k\}$收敛到$\boldsymbol{S}$，即$\lim\limits_{k \to \infty} \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{S}$.

证明：由定理 1 证明可得$0 \leqslant \boldsymbol{X}_0 \leqslant \boldsymbol{X}_1 \leqslant \cdots \leqslant \boldsymbol{X}_{k+1} \leqslant \boldsymbol{S}$，则$\{\boldsymbol{X}_k\}$有界且单调递增。

下面证明矩阵序列$\{\boldsymbol{X}_k\}$收敛到$\boldsymbol{S}$，因为矩阵序列$\{\boldsymbol{X}_k\}$是非负的，且单调递增有界，所以存在一个非负矩阵$\boldsymbol{S}^*$，使$\lim\limits_{k \to \infty} \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{S}^*$，事实上，$\lim\limits_{k \to \infty} \boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{S}^*$. 显然，$\boldsymbol{S}^* \leqslant \boldsymbol{S}$. 另一方面，对算法中$\{\boldsymbol{X}_{k+\frac{1}{2}}\}$和$\{\boldsymbol{X}_{k+1}\}$取极限，可以得出$\boldsymbol{S}^*$也是方程（1）的一个非负解。由最小非负解的性质$\boldsymbol{S}^* \geqslant \boldsymbol{S}$，得$\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{S}$，结论 2）成立。

4 数值实验

例 1 给出方程（1），其中，

$$A = D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & & \\ & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ -1 & & & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}，\ B = I_n，\ C = \zeta I_n，$$

$\zeta > 0$ 为给定的常数，令 ζ 分别为 0.2、0.5、1.0，$X_0 = 0$，I_n 为单位矩阵，$n = 256$，数值结果如表 1 所示。

表 1　例 1 的数值结果（*m*=16）

Tab. 1　Numerical results of Example 1 (*m*=16)

ζ	参量	ALI	MLI	AMLI1	AMLI2
0.2	IT	9	7	5	3
	Nre	7.82e−14	1.35e−14	3.66e−14	1.98e−13
	CPU/s	0.479 5	0.422 9	0.484 8	0.333 0
0.5	IT	9	8	6	4
	Nre	3.92e−13	2.40e−13	7.65e−14	5.59e−14
	CPU/s	0.478 4	0.447 0	0.511 7	0.358 4
1.0	IT	10	11	7	5
	Nre	3.91e−13	3.72e−14	4.30e−13	1.35e−13
	CPU/s	0.500 6	0.582 0	0.565 5	0.417 0

注：IT—迭代步数；Nre—误差；CPU—运行时间；下同

例 2 给出方程（1），其中，

$$A = \mathrm{tridiag}(-I, T, -I) \in \mathbb{R}^{n\times n}，\ D = 10A$$

为块三对角矩阵，

$$B = \frac{1}{50}\mathrm{tridiag}(1,2,1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

为三对角矩阵且 $C = \zeta B$，ζ 为一个正参数且能保证 K 是非奇异的 M -矩阵。

$$T = \mathrm{tridiag}(-1, 4 + \frac{200}{(m+1)^2}, -1) \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

令 ζ 分别为 0.2、0.5、1.0，$X_0 = 0$，I_n 为单位矩阵，$n = 256$，数值结果如表 2 所示。

表 2　例 2 的数值结果（*m*=16）

Tab. 2　Numerical results of Example 2 (*m*=16)

ζ	参量	ALI	MLI	AMLI1	AMLI2
0.2	IT	89	42	6	6
	Nre	5.36e−12	5.39e−12	2.01e−13	4.96e−13
	CPU/s	3.632 8	1.779 4	0.435 7	0.410 1
0.5	IT	89	42	6	6
	Nre	5.37e−12	5.40e−12	2.06e−13	5.03e−13
	CPU/s	3.565 0	1.809 5	0.498 2	0.428 0
1.0	IT	89	42	6	6
	Nre	5.39e−12	5.43e−12	2.14e−13	5.18e−13
	CPU/s	3.535 0	1.785 2	0.431 9	0.399 1

通过两组实验结果可以看出，在例 1 中，当$\alpha=\beta$时，迭代步数方面，AMLI1 算法和 AMLI2 算法效果都优于 MLI 算法与 ALI 算法，在时间方面也相差无几。在例 2 中，当$\alpha \neq \beta$时，AMLI1 算法和 AMLI2 算法效果明显优于 MLI 算法与 ALI 算法，迭代次数明显减少，时间明显缩短。

5 结论

本文给出了解决非对称代数 Riccati 方程最小非负解的两种有效算法，并通过数值结果说明了这两种算法的可行性与优越性。根据目前的发展状况，非对称代数 Riccati 方程仍有很大的发展空间，本文只对双参数交替法进行了介绍，课题组会在以后的学习中继续深入探讨这个问题。

[参考文献] (References)

[1] GUO C H. Nonsymmetric algebraic Riccati equations and Wiener-Hopf factorization for *M*-matrices[J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 2001, 23(1): 225-242.

[2] XUE J G, XU S F, LI R C. Accurate solutions of *M*-matrix algebraic Riccati equations[J]. Numer. Math., 2012, 120(4): 671-700.

[3] GUO C H, HIGHAM N J. Iterative solution of a nonsymmetric algebraic Riccati equation[J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 2007, 29(2): 396-412.

[4] 徐树方. 控制论中的矩阵计算[M]. 北京：高等教育出版社，2011.
XU S F. Matrix computation in cybernetics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2011. (in Chinese)

[5] GUO C H, LAUB A J. On the iterative solution of a class of nonsymmetric algebraic Riccati equation[J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 2013, 22(2): 376-391.

[6] GUO X X, LIN W W, XU S F. A sructure-preserving doubling algorithm for nonsymmetric algebraic Riccati equation[J]. Numer. Math., 2006, 103(3): 393-412.

[7] WANG W G, WANG W C, LI R C. Alternating-directional doubling algorithm for *M*-matrix algebraic Riccati equations[J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 2012, 33(1): 170-194.

[8] XUE J G, LI R C. Highly accutate doubling algorithms for *M*-matrix algebraic Riccati equations[J]. Numer. Math., 2017, 135(3): 733-767.

[9] BAI Z Z, GUO X X, XU S F. Alternately linearized implicit iteration methods for the minimal non-negative solutions of the nonsymmetric algebraic Riccati equations[J]. Numer. Linear Algebr. Appl., 2006, 13(8): 655-674.

[10] LU H Z, MA C F. A new linearized implicit iteration method for nonsymmetric algebraic Riccati equations[J]. J. Appl. Math. Comput., 2016, 50: 227-241.

（责任编辑：刘楠）