相对论效应导致的宇宙暗物质现象

李志平[1]，李然[2]

[1] 独立研究员

[2] 多伦多大学科学与艺术学院，加拿大

摘要：本文对牛顿万有引力定律提出了一种非黎曼几何的相对论性修正，用以求解星系外侧天体绕星系中心的运动轨迹以及宇宙中的暗物质问题。研究结果表明，星系外缘区域天体运行在大尺度对数螺线轨道、而不是局域性的椭圆轨道上，从而导致了平坦的星系旋转曲线。这一相对论天体动力学原理的发现揭示出星系为什么会自转太快，为什么会存在着超出牛顿理论预期的额外引力。事实上这一额外的引力并非来自于假说中的暗物质，也并非如修正了的牛顿动力学理论(MOND)所断言那样，引力会在加速度极其微弱的区域违背牛顿理论，而是由于引力的非超距作用即相对论效应能够产生更强的引力场所导致的结果。

关键词：暗物质，等效原理，星系旋转曲线，对数螺线轨道，MOND。

中图分类号： P139

The phenomenon of dark matter caused by relativistic effect

Zhiping Li[1], Ran Li[2]

[1] Independent Researcher

[2] Faculty of Arts and Science, University of Toronto, Ontario, Canada M5S 1A1

Abstract: In this paper, a modified Newtonian theory of gravity of non-Riemannian geometric relativity is made for solving the trajectories of objects around the galactic center and the dark matter problem in universe. The result shows that the objects in outer region areas of galaxies run on the global logarithmic spiral orbit, rather than local elliptical orbit, which results in the flatness of the rotation curves of galaxies. This discovery of relativistic astrodynamics reveals why there is an extra gravity pulled galaxies spin faster than Newton's gravity. In fact, this extra gravity is neither from the hypothesis of dark matter nor as Modified Newtonian Dynamics (MOND) in which the gravity will be against Newton's theory in the regions where the acceleration is extremely weak. It is just due to the fact of relativistic effects that adjusts Newton's laws to create a stronger gravitational field caused by limitation of the speed of light in universe.

Key words: Dark matter, Equivalence principle, Rotation curves, logarithmic spiral track, MOND.

基金项目：

作者简介：Zhiping Li, Male, Email address: *zhiping_lee@hotmail.com*. Ran Li, Female, Email address: rr.li@mail.utoronto.ca

0 引言

牛顿的引力定律被假定为通过物体间的空间瞬时发生作用，而不论其间隔有多大，换言之，引力效应必须以无限大的速度传递，这是与相对论的要求不协调的假说。事实上，在比太阳系更大的宇宙距离上，几乎就没有直接证据表明牛顿引力理论的超距作用机制是正确的。即使是牛顿本人，对其万有引力理论中暗含的超距作用理念也不认同，在给剑桥大学三一学院院长理查·本特利（Richard Bentley）的信里，牛顿写到：

"……说引力是物质的一种先天的、内禀的、本质的东西，从而一个物体可以通过真空对远处另一物体直接作用，可以不需要通过任何媒介，把它们的作用和力从一个物体传播到另一个物体——这种说法对我来说是如此之荒谬，我相信凡是对哲学问题有一定思考能力的人，都不会陷入这种荒谬……"——译文引自[1]。

把引力归结为一种场的观念认为，场具有有限的传播速度，因而可以不需要超距作用，另外，通过场的参与，还能够维持能量和动量守恒定律不被破坏。根据狭义相对论理论，光速是在洛伦兹变换下唯一保持不变的速度，因而，如果引力场以有限的速度传播，只可能是光速。不过，由于引力作用的传播速度对诸如行星运动的局部现象影响甚微，因而超距作用机制的缺陷在太阳系这样的局域范围内可以被漠视。然而，对于极为遥远的恒星绕星系中心的运动，必然会由于引力的非超距作用表现得与绕太阳运行的行星所依循的牛顿轨道不同，天体运行的不同模式也将呈现出不同的天文现象。

但是，迄今为止所有关于宇宙暗物质现象的讨论都是以这样的观念为基础，即牛顿引力理论的超距作用形式即牛顿公式在大尺度上也是正确无误的，于是，为了能够解释观察到的暗物质现象[2, 3]，人们很自然会想象出一些暗物质[4–7]来填补引力的空缺，或者试图通过拟合星系自转曲线而直接修正牛顿的动力学公式，以获取更大的引力（MOND）[8–15]。不过，根据近期的天文观测结果，研究人员对所观测到的153个不同星系自转曲线的分析表明[16]，星系中可见物质的分布与星系中不同距离的恒星径向加速度之间的关系，有着很强的相关性，这种相关性不受暗物质是否存在的影响。虽然这也是一种纯粹的经验关系，并没有理论根据，但对于MOND假说确实是强有力的支持。

本文将狭义相对论的基本精神推广到牛顿的引力和动力学理论中，并通过重新诠释爱因斯坦等效原理，扩大了原有的理论，从而导出了新的增力方程式和星系引力透镜公式。这就使得引力的作用在大尺度上比牛顿和爱因斯坦理论所描述的更强，并且随作用距离的增加衰减得更慢，依此可求解没有暗物质的暗物质问题。

1 超距作用的牛顿引力

根据牛顿的引力定律和运动定律，绕太阳运行的行星所依循的是椭圆轨道，其轨道方程可以通过求解行星运动微分方程来求得。令太阳的引力质量为M_0，行星的引力质量为m_G，则由牛顿万有引力定律，太阳和行星之间的引力为

$$F(r) = -G\frac{M_0 m_G}{r^2}, \tag{1}$$

式中，G 为万有引力常数，r 为太阳与行星之间的距离。

根据牛顿第二定律，即运动定律

$$F(r) = m_I \frac{d^2 r}{dt^2} = m_I \ddot{r}, \tag{2}$$

其中，m_I 为行星的惯性质量。采用平面极坐标系来解这样的两体有心力问题是很方便的。取力心为极坐标的极点，由于太阳的质量 M_0 远大于行星的质量 m_G, 可以近似认为太阳的质心即为极坐标的极点，于是，行星的运动微分方程为

$$\begin{aligned} m_I(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F(r); \\ m_I r^2 \dot{\theta} &= L. \end{aligned} \tag{3}$$

式中，L 为行星绕日动量矩的量值。

为求解方便，令 $\mu = 1/r$，首先需要求出 μ 和 θ 的微分方程，于是有

$$\dot{\theta} = \frac{L\mu^2}{m_I}; \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}(\frac{1}{\mu})\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\mu^2}\frac{d\mu}{d\theta}\dot{\theta} \\ &= -\frac{L}{m_I}\frac{d\mu}{d\theta}; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(-\frac{L}{m_I}\frac{d\mu}{d\theta}) = \frac{d}{d\theta}(-\frac{L}{m_I}\frac{d\mu}{d\theta})\dot{\theta} = -\frac{L^2\mu^2}{m_I^2}\frac{d^2\mu}{d\theta^2}. \tag{6}$$

将(4)和(6)代入(3)，即可消去参数t，求得轨道微分方程

$$-\frac{L^2\mu^2}{m_I}(\frac{d^2\mu}{d\theta^2} + \mu) = F(r). \tag{7}$$

将式(1)代入上式并令 $m_G = m_I$ 以及 $J^2 = L^2/m_I^2$，得

$$(\frac{d^2\mu}{d\theta^2} + \mu) = \frac{GM_0}{J^2}. \tag{8}$$

如果不考虑其他行星的干扰（摄动）以及来自银河系中心的非均匀引力场，J 被认为就是一个近似的常量。解这个微分方程会得到一个椭圆，太阳位于该椭圆的一个焦点上。

2 狭义相对论框架下修正的牛顿引力

牛顿的万有引力定律公式(1)的形式在严格意义上是静止条件下才成立的公式。当物体处于运动状态时，由于引力的场属性缘故，原则上，无论物体的相对运动是高速还是低速，相对论效应都会存在，这将导致一种范式的改变，对于大尺度的宇宙距离尤为明显。

当然，宇宙中的星系几乎都含有成百上千亿颗恒星，我们的问题是要用解析方法来解决一个数量巨大的N体问题。一般说来，除了一些特殊情形，甚至普通三体问题都没有解析解，挑

战以上问题几乎是不可能的。但是，对于求解星系外缘的天体轨道，我们反而可以将其简化成一个十分简单的模型。

设可考察的星系质量 M_0 主要集中于星系内核区域，质心位于星系中心，如图1(a)所示。如果在星系外缘距中心 r 处有一个测试质点m，其引力质量为 m_G，一个测试质点的质量不会对巨大星系的核心质量造成任何可观的影响，因此，这一巨大的简化使得 M_0 与 m_G 之间构成两体有心力系统，当然可仿照上节，采用平面极坐标系来解这样的两体有心力问题。于是，测试质点的运动微分方程亦为

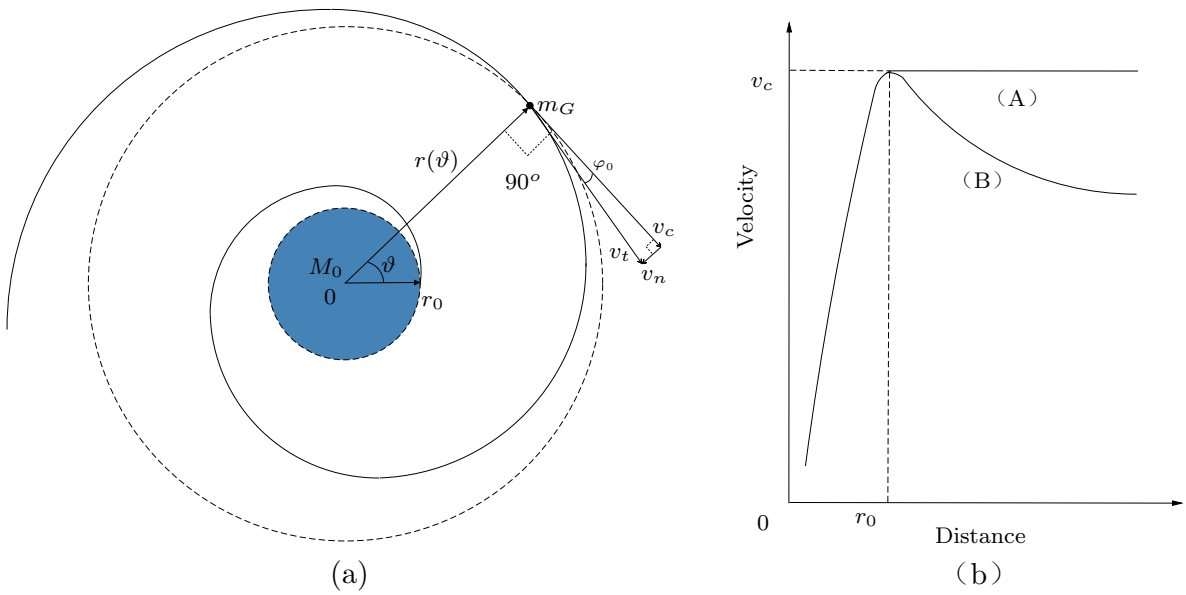


图 1: 大尺度下万有引力的非超距作用模型，星系外缘天体绕星系中心的运行轨道为对数螺线而非椭圆，这就导致星系外侧天体的旋转速度比用牛顿引力定律公式计算出来的结果快。(a)：曲线上的测试质点 m_G 沿对数螺线轨道由外向内运动，其中，v_t 为切向速度；v_c 为圆周速度；v_n 为向心速度。(b)：星系自转曲线，（A）为经相对论修正后的牛顿值；（B）为牛顿经典理论预期的值。

$$
\begin{aligned}
m_I(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F(r); \\
m_I r^2 \dot{\theta} &= m_I\, r\, v_c = L,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

式中，L 为测试质点绕星系质心动量矩的量值；m_I 为测试质点的惯性质量；v_c 为测试质点相对于星系中心运动速度的圆周分量。

测试质点围绕星系中心运动的向心力由 M_0 对它的万有引力提供。在质心参考系中，根据

牛顿力学的概念，有

$$G\frac{M_0 m_G}{r^2} = m_I \frac{v_c^2}{r}. \tag{10}$$

由于星系外部宇宙的大尺度均匀性，使得 M_0 与测试质点 m_G 构成的是一个纯净的两体系统，因而我们的测试质点在围绕星系中心运动时可以保持严格的动量矩守恒，换言之，L 是一个真正的常数。这样的条件在行星绕日的局域系统内是不存在的，因为来自银河系中心巨大的非均匀引力场，使得行星绕日系统并非是真正的两体系统，显然，行星绕日的动量矩L 也并非是一个真正的守恒量。

现在，利用式 (9) 的第二式，我们可以将式(10)变换为

$$\mid F(r) \mid = G\frac{M_0 m_G}{r^2} = m_I \frac{v_c^2}{r} = \frac{L^2}{m_I r^3}. \tag{11}$$

将此式代入运动微分方程 (9) 的第一式，可得

$$m_I(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\mid F(r) \mid = -G\frac{M_0 m_G}{r^2} = -\frac{L^2}{m_I r^3}. \tag{12}$$

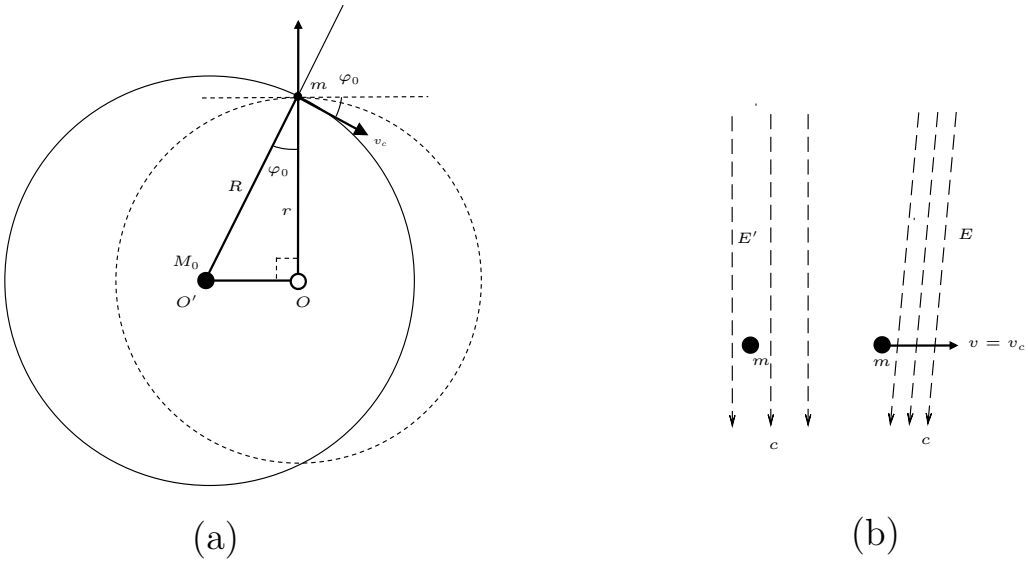
即

$$-\frac{L^2\mu^2}{m_I}(\frac{d^2\mu}{d\theta^2} + \mu) = -\mid F(r) \mid = -\frac{L^2}{m_I r^3} = -\frac{L^2}{m_I}\mu^3. \tag{13}$$

进一步，我们需要考虑如何运用相对论理论去修正静态引力的“库伦定律”、即 (1) 式的超距作用形式。首先以这样的观念为出发，在图2(a)中，从跟着测试质点 m 以圆周速度 v_c 绕 M_0 运动的观察者看来，如果引力场以光的速度传播，则观察到的M_0 并不是处于速度的垂直方向O'，而是偏离了一个角度φ_0，移动到了O处，有一个引力传播的光行差。犹如在无风的雨天里，垂直降落的雨滴在一个向前奔跑者那里并不是丝毫不偏地竖直下落的，而是从前方倾斜落下，似乎雨滴具有一个迎面的水平速度分量，跑得越快，倾斜得也就越厉害，同时雨滴的密度也显得更高。引力光行差的成因与此相似，只不过还需要考虑相对论效应带来的修正。

在我们的问题中，由于 m 绕 M_0 的准圆周运动性质，这种引力光行差效应是恒定的，现在的关键问题是如何确定 v_c 与倾角φ_0之间的关系。参考图2(b)中的场景，这例子是简单的，设有一个天顶方向的引力场E'，如果我们将场的强度与场线密度互相联系起来，则在场中静止的观察者m看来，场线来自于天顶的垂直方向，且场强刚好为静场E'。但如果这观察者m以横向速度v_c在场中运动，则不仅场线看上去向前倾斜了一个角度，而且场线的密度也增加了，场强由E'增强为E。这道理是因为场线以速率c垂直下来，而这观察者m以速率v_c横向运动，当场线下来时的竖直距离为ct时，m水平走过的距离为vt，容易看出，当m横向通过这些场线时，有一个多普勒效应，因此场线的密度增加了一个压缩因子 $(1 + v_c/c)$。但这不是正确的增大倍数，因为当我们假设水平距离为vt时，尚未考虑到运动的观察者得出的另一个距离。由于动体的相对论“尺缩效应”，运动的观察者需要用“缩短”的尺子来度量这段距离，于是，牛顿引力场的相对论修正因子似乎应该是

$$\kappa' = \frac{1 + v_c/c}{\sqrt{1 - v_c^2/c^2}}, \tag{14}$$



(a) (b)

图 2: (a)相对论位移：以圆周速度 v_c 绕 M_0 运动的观察者 m 看来，如果引力场以光的速度传播，则观察到的M_0 并不是处于速度的垂直方向O'，而是偏离了一个角度φ_0，移动到了O处。(b)引力光行差：对于横向运动的观察者，垂直的引力场源不仅会朝向前方倾斜，而且场线的密度也将增加。

但这只是一个空间变换因子，在相对论的时空观念中，考虑对等的时间变换因子是必须的。由于时间流的相对论性膨胀，还应该有一个与上式相同的相对论因子参与其中，于是，正确的相对论修正因子应为

$$\kappa = (\frac{1+v_c/c}{\sqrt{1-v_c^2/c^2}})^2 = \frac{1+v_c/c}{1-v_c/c} = \frac{1+\xi}{1-\xi}, \tag{15}$$

其中，$\xi = v_c/c$，展开后取一级近似

$$\kappa \approx 1 + 2\xi + 2\xi^2 + 2\xi^3 + \xi^4 \approx 1 + 2\xi; \tag{16}$$

于是我们得到一个增力公式

$$\mid F(r) \mid = \kappa G\frac{M_0 m_G}{r^2} \approx (1+2\xi)G\frac{M_0 m_G}{r^2} = (1+2\xi)\frac{L^2}{m_I r^3}. \tag{17}$$

将此力 $F(r)$ 代入方程 (13) 后，可得

$$\frac{L^2\mu^2}{m_I}(\frac{d^2\mu}{d\theta^2} + \mu) = (1+2\xi)\frac{L^2}{m_I}\mu^3. \tag{18}$$

整理后得到一个齐次方程

$$\frac{d^2\mu}{d\theta^2} - 2\xi\mu = 0, \tag{19}$$

此方程有解

$$\mu = c_1 e^{-\sqrt{2\xi}\,\theta}, \tag{20}$$

由此，我们解得质点的轨道方程

$$r = \frac{1}{\mu} = r_0 e^{\sqrt{2\xi}\,\theta}, \quad (r > r_0); \tag{21}$$

其中，c_1 及 r_0 为常数。显然，这轨迹并非是椭圆而是一条螺线，由于变量 θ 是由 $\infty \to 0$，故测试质点将会沿轨道 (21) 自外向内运动。

如果一个星系的内部区域以 r_0 为界限，而星系的质量主要集中于 $r \leqslant r_0$ 的星系内部区域，那么，定义 r_0 为临界半径，当 $r > r_0$ 时，随着距离的增加，质量 M_0 已经是一个常数。对于这样的自引力系统，动量矩 L 便是一个真正的守恒量，因此通过重新安排方程式 (10)，可知下式成立

$$v_c = G\frac{M_0 m_G}{v_c r\, m_I} = G\frac{M_0 m_G}{L} = constant \quad (r > r_0), \tag{22}$$

即速度 v_c 是一个常数。这结果证明，在轨道方程 (21) 中，$\xi = \xi_0 = v_c/c =$ 常数，亦即远离星系内核区域的测试质点的轨迹为对数螺线或称等角螺线，如图1(a)所示，轨道方程为

$$r = r_0 e^{\sqrt{2\xi_0}\,\theta} \qquad (r > r_0), \tag{23}$$

该对数螺线的倾角

$$\varphi_0 = \tan^{-1}\sqrt{2\xi_0} \tag{24}$$

为一定值。运行在对数螺线轨道上的天体等效于在圆周轨道上运行，因此必然保持恒速，这就是为什么会观察到平坦的星系自转曲线，对此，作者将在本文的第 3 章中另行给出几何上的证明。以上结果原则上具有普适性，但由于宇宙中的星系质量分布情形不同，因而对于不同的星系而言，r_0 和 v_c 必各有所异。图1(b) 所示即为星系的自转曲线示意。

以上是我们根据狭义相对论原理修正的牛顿力学理论，它的结果除了能够预言一条平坦的星系自转曲线外，理应需要被其他天文观测证实。现在，我们以银河系为例来验证理论预言的正确与否，巧合的是，我们的太阳系几乎处于银河系的临界半径附近，即[17]

$$r_0 \approx 8.29 \pm 0.16 kpc \approx 2.6 \times 10^{17} km; \tag{25}$$

太阳绕银心的圆周速度为

$$v_c \approx 239 \pm 5 kms^{-1}. \tag{26}$$

将此值以及光速值 $c = 3 \times 10^8 ms^{-1}$ 代入公式 (24) 中，可预计银河系外缘天体绕银心的轨道倾角为

$$\varphi_0 = \tan^{-1}\sqrt{2\xi_0} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{2v_c}{c}} \approx 2.29^0; \tag{27}$$

根据这个倾角的理论值，可以预期太阳朝向银心的向心速度 v_n 为

$$v_n = v_c \times \tan\varphi_0 \approx 9.56kms^{-1}, \tag{28}$$

天文观测证实，太阳轨道确实存在朝向银心的速度分量[18]

$$v_n \approx 10 \pm 0.36kms^{-1}, \tag{29}$$

据此推测，以太阳系距离银心的半径 r_0 为界，银河系外缘天体绕银心的轨道倾角均应为此值。根据本文的理论，图3 给出了与观测相一致的银河系自转曲线，并不需要暗物质来帮忙。

必须特别指明，由式 (27) 给出的是太阳系以及太阳系以远的天体绕银河系中心的轨道倾角，并非是银河系悬臂的表观倾角，银河系各悬臂的表观曲线也并非是恒星的运动轨迹。有观测数据表明，太阳系所在的局部悬臂倾角为 $10.1^0 \pm 2.7^0$[19]。虽然银河系各悬臂也有着近似于对数螺线的形状，但其成因至今依然不清楚，期望本文能对这一问题的研究有所启发。

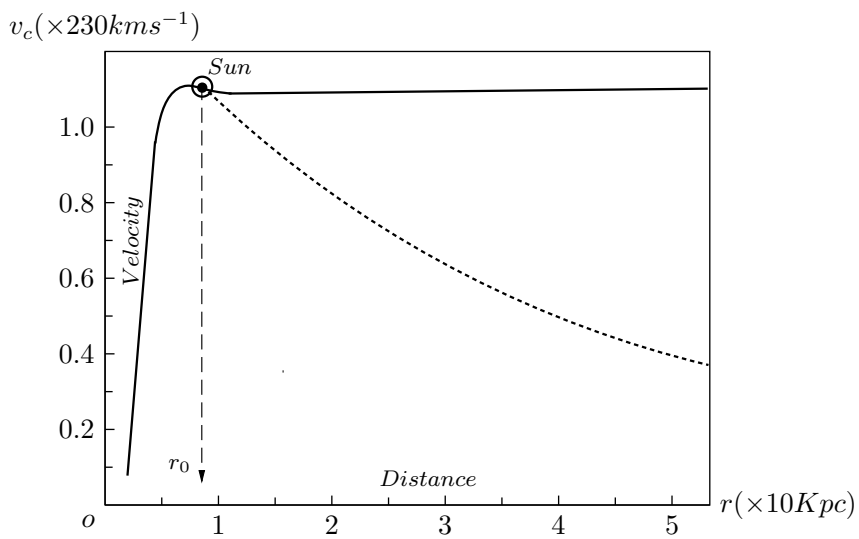


图 3: 银河系的自转曲线: 实线为与观测相符合的经相对论修正后的牛顿值；虚线为牛顿经典理论预期的值。

3 等角螺线轨迹的几何意义

以上我们通过引力传播的光行差效应来修正牛顿引力理论，使其符合相对论原理，从而解释了宇宙中的暗物质问题。这些有关引力问题的结果，如果以几何的角度观察，则更为直观了然。

根据牛顿力学，粒子在球对称引力场中的运动轨道可以是圆形的，但是形成圆形轨道的初始条件十分特殊，当且仅当粒子的速度与半径垂直、且满足等式(10)的条件时，才可能有圆形轨道出现，如图4(a)中的圆形轨道 S。但是圆轨道不稳定，根据以上的证明，引力传播的光

行差效应，使得粒子运行的圆轨道演变成等角螺线(对数螺线)轨道，这是粒子运动微分方程的解。几何上，这相当于这样一个命题，如图4(a)所示，当测试粒子沿牛顿圆轨道 S 通过观察点N的瞬间，引力场的中心由曲线 I 上对应点N的曲率圆心 O' 沿着极轴移前至极点 O 的位置，而 O 相对于沿轨道I 上的运动粒子永远是一个不动点，即极点，似乎点 O 才是 M_0 的质心，如果曲线 I 为等角螺线则命题成立。证明如下：

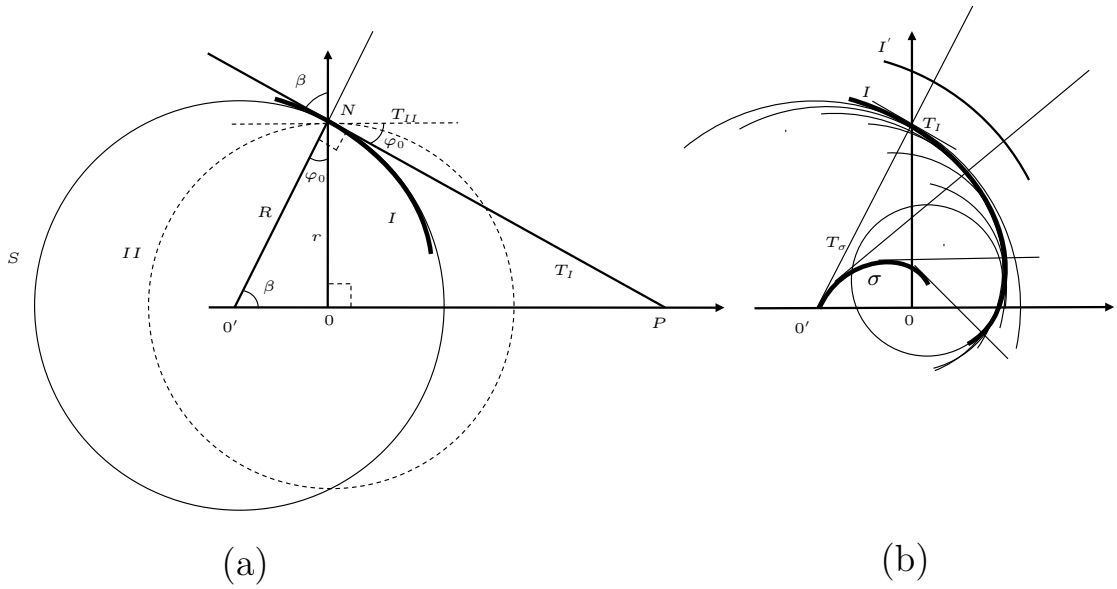


图 4: 等角螺线轨道形成的几何解释：(a)由于相对论光行差效应，运动质点绕质心或是星系外缘天体绕星系中心运行轨迹的曲率中心发生位移，例如轨道上N点的曲率中心(引力中心)由 $0'$ 偏移至 0，因此等角螺线轨道 I 得以形成。(b)等角螺线轨道 I 是这样一系列内切圆的包络，这些内切圆圆心的轨道 σ 也形成等角螺线，I 和 σ 互为渐伸线和渐屈线。

设曲线 I 的方程为等角螺线(23)，对其求导数得 $dr/d\theta = r'_\theta = \sqrt{2\xi_0}\cdot r\,; dr^2/d\theta^2 = r''_\theta = 2\xi_0 r$，把它们代入曲率半径的公式，可求得图4(a)中曲线 I 上N点的曲率半径为

$$R = \frac{(r^2 + r'^2_\theta)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2_\theta - rr''^2_\theta} = r\sqrt{1+2\xi_0}, \tag{30}$$

而$\sqrt{2\xi_0} = \tan\varphi_0 = \frac{\overline{OO'}}{\overline{ON}}$，于是，曲率半径 R 可以写成

$$R = \frac{r}{\cos\varphi_0}, \tag{31}$$

这正是极法线长$\overline{O'N}$，这就证明了曲线 I 上对应N点的曲率中心为O'时，极点必为O。又因为$\xi_0 = v_c/c$；$\varphi_0 = \tan^{-1}\sqrt{2\xi_0}$，所以这结果也证明了，由于测试粒子的运动，引力传播的光

行差效应造成引力源的方向似乎向前方偏转了一个角度 φ_0，这相当于**引力中心产生等效位移**。比较曲率圆 S 的半径 R 和圆 II 的半径 r，有 $R > r$，但 M_0 的值没变，这意味着引力的相对论光行差位移产生了增力效应，即

$$\frac{F(r)}{F(R)} = \frac{R^2}{r^2} = (\frac{1}{\cos\varphi_0})^2 = 1 + 2\xi_0, \tag{32}$$

此即为增力公式 (17) 的几何意义，特别是在星系尺度下，这样的位移和增力效应改变了恒星的轨道模式。可见，由几何方法也可以证明，**引力的光行差位移是这些天体等角螺线轨道的成因**。此结论还可以解读为，运行在等角螺线轨道上的粒子始终等效于在圆轨道上运行，只不过这些圆形轨道的曲率中心在光滑连续地改变着，而运行在圆轨道上的粒子可保持匀速运动。

接下来我们考察平面等角螺线与本文论题相关的一些性质，这些都是已知的数学定理，不需要再另行给出证明。

i) 任一经过极点的直线切割等角螺线所形成的夹角相等，而且，等角螺线是唯一具有该性质的曲线。如图1(a)或图4(a)所示，这夹角可用 β 或倾角 φ_0 表示，这一性质使得等角螺线与圆密切相关(圆的这些夹角 $\beta = 90^0$、倾角 $\varphi_0 = 0$)，例如在等角螺线方程式 (23) 中，若 $\sqrt{2\xi_0} = 0$，则有 $\varphi_0 = \tan^{-1}\sqrt{2\xi_0} = 0$，等角螺线 I 退化为图4(a)中虚线所示的圆 II；并且，圆 II 将与圆 S 重合。因圆 S 是由牛顿等式 (10) 所确定的圆轨道，因而可称其为**“牛顿圆”**，而圆 II 是相对论光行差的局域效应，故称其为**“爱因斯坦圆”**。

ii) 等角螺线是一系列半径诸点变化的曲率圆（密切圆）族的包络线，我们称这些密切圆为**“牛顿圆族”**，如图4(b)所示。**这些曲率圆的圆心形成的轨迹——渐屈线也是具有相同方程的等角螺线，不同的是绕极点回转了一个角度，原等角螺线即为这一渐屈线的渐伸线**。曲线 I 和曲线 σ 的对应切线 T_I 与 T_σ 互相垂直，这样一来，渐屈线 σ 便成为渐伸线 I 法线族的包络线。在星系自转曲线的问题中，等角螺线的这一性质使得我们可以这样推断，星系质心的轨迹不是固定的，而是与星系外缘天体轨迹有着相同方程的等角螺线，是星系外缘天体轨迹的渐屈线。

iii) 同一条等角螺线渐屈线可有无数条相同的等角螺线渐伸线。如图4(b)中，渐屈线 σ 可有无数条相同方程的等角螺线渐伸线 I、$I^{'}\cdots$。这一性质表明，如果星系质心的轨迹是等角螺线，那么，星系外缘任何一个天体都存在一个相对应的质心，而这些质心都在这渐屈线上。相应的，所有的外缘天体必然都以等速沿等角螺线轨道运行，可以构成无数条渐伸线轨道，而这些轨道的方程都相同，因此，呈现出的是平直的自转曲线。

iv) 等角螺线上的动点到极点的弧长为有限值，但转过的圈数却是无限的。曲线绕极点旋转无数次，无限地接近它，但终不能达到。如图4(a)所示，由N点出发的质点沿等角螺线运行至极点的路径长度，等于曲线在N点切线与极轴的交点P的线长NP，但需要转行无限多圈。对应星系模型，**向内旋进的物质只能在无限的周期和时间之后到达那里，这意味着任何物质永远不可能到达那里，只是旋转着越来越接近这一极限点，奇点处不可能有内容物—黑洞内是空的**。

v) 极点对于曲线永远是一个空的不动点。这个性质相当于这样一个命题，当图4(a)所示的曲线 I 无滑动地沿着直线NP滚动时，极点描出的是一条直线。这是理想惯性空间中自由质点的轨迹，如果浩瀚的宇宙能够用这样的惯性空间来描述，则其中充满了以星系为基本单元的成

员。

显然，如图4(a)所示，等角螺线上的动点、譬如 N 点，在该点足够小的邻域，“爱因斯坦圆”II 是等角螺线 I 的极限近似；且当动点处于弱场低速条件时，等角螺线 I 和“爱因斯坦圆”II 都以“牛顿圆”S 为极限近似。

4 等效原理的破坏

考察图1(a)中质点的轨道速度特性，因为向心速度是一个常量，数学上，似乎质点的运行轨迹应该是阿基米德螺线、或称等速螺线才正确。其实不然，在物理上，运动着的质点不仅仅是一个数学点，还必须遵守角动量守恒定律，这就使得运动轨迹只能是对数螺线。

基于角动量守恒定律以及以上的结果，对于图1(a)中的运动质点，我们可以得出一个有趣的推论：

$$m_I\, r = \frac{L}{v_c} = constant, \qquad (r \geqslant r_0), \tag{33}$$

这意味着以下的定律成立

$$m_I \propto \frac{1}{r}\,, \qquad (r \geqslant r_0); \tag{34}$$

此外，还可以由对数螺线轨道的特征得到同样的结果：令S为对数螺线(23)上的弧长，我们有

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + (rd\theta)^2; \\ dr &= \sqrt{2\xi_0}\, rd\theta; \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{L}{r^2 m_I}, \end{aligned}$$

于是，可以得到以下的方程

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + (rd\theta)^2 = (2\xi_0 + 1) r^2 d\theta^2; \\ \frac{ds}{d\theta} &= \sqrt{(2\xi_0 + 1)}\, r, \end{aligned}$$

因为

$$v_t = \frac{ds}{dt} = \frac{L}{m_I r}\sqrt{2\xi_0 + 1} = constant, \tag{35}$$

故此

$$m_I = \frac{L}{v_t\, r}\sqrt{2\xi_0 + 1} \propto \frac{1}{r}\,, \qquad (r \geqslant r_0), \tag{36}$$

看得出来，这也是质点必须走对数螺线轨道的物理原因。

质点的对数螺线轨道以临界半径 r_0 为界，这就是星系平坦自转曲线的转折点，在此临界半径处有 $m_I = m_G$，于是，根据角动量守恒定律，应有

$$m_I v_c r = m_G v_c r_0, \qquad (r \geqslant r_0), \tag{37}$$

这样，我们便可以得到星系引力场中运动质点的惯性随引力势（这里表示为距离）“跑动”的表达式

$$m_I = m_G\, \frac{r_0}{r}; \tag{38}$$

对我们银河系而言，巧合的是，太阳恰好处在这样的临界半径区域，也就是银河系自转曲线的转折点附近[17]，即银河系的$r_0 \approx 8.29 \pm 0.16kpc \approx 2.6 \times 10^{17}km; v_c \approx 239 \pm 5kms^{-1}$。

实际上，由于历史的原因，人们根据伽利略实验的结果，定义在地球上 $m_I/m_G = 1$，因此才有了国际单位制中 $G \approx 6.67 \times 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$ 这样一个测量值。不过，对于银河系而言，质点的 $m_I/m_G = 1$ 一经在 r_0 处被定义，则仅对于地球上或银河系的质心系观察者才是绝对的，虽然任何一个不同位置的观察者都会在自己的局部惯性系中观测到等效原理成立，而在地球上的观察者或星系的质心系观察者看来，在其他位置上，理应有式(38)成立。这是因为星系的巨大质量造成的非均匀场、或者说时空曲率是绝对的，不因参考系或者坐标系的改变而有所变化，也不可能通过坐标变换而被消除。

5 等效原理的局域性

方程式(38)表达的是在星系尺度上质点惯性的变化规律。我们现在考察在太阳系这样的局部范围内，运动质点的惯性如何变化。如果将轨道方程(23)用于太阳系，则会误认为行星的轨道也是对数螺线，这意味着太阳系的不稳定。进一步地，方程式(38)亦会导致违背等效原理的巨大偏差，这肯定不符合太阳系内的观测事实。

实际上，由于太阳系范围要远远小于星系尺度，因而m_I/m_G的跑动在太阳系这样的局部范围内将会很微弱。理论上，沿着银河系盘面的径向将出现最大的跑动量。取式(38) 对r 的微分可得

$$\triangle m_I = -\frac{m_G r_0}{r^2} \cdot \triangle r, \tag{39}$$

惯性的相对变化率为

$$\frac{\triangle m_I}{m_G} = -\frac{r_0}{r^2} \cdot \triangle r, \tag{40}$$

在足够小的空间范围内，$\triangle r \approx 0$，因此必有$\triangle m_I \approx 0$ 即 $m_I \approx m_G$，二者仅在同一点上严格等效，因此有所谓局部性等效原理。这结果意味着，类似于厄缶类型的等效原理检验方法几乎不能分辨 m_I 与m_G 的背离，因而是徒劳的。在扩大实验范围的条件下，例如，考察地月范围的落体实验，取 $r = r_0 \approx 2.6 \times 10^{17}km$ 为太阳系至银心的距离，地月距离约为$|\triangle r| \approx 4 \times 10^5 km$, 代入方程(40)，这结果也微弱得很难察觉：惯性质量的相对变化率即背离等效原理的量值为 $|\triangle m_I/m_G| \approx 10^{-12}$。

实际上，m_I/m_G 的变动在太阳系这样的局部范围内将会更为复杂，图1所示的两体模型不再适用。一个典型的例子是先锋号飞船的引力异常现象。当先锋-10和先锋-11号飞离地球约 $20 \sim 70$ 个天文单位时，发现异常的多普勒频移，这可以解释成一个牛顿引力之外的、数值为 $(8.74 \pm 1.33) \times 10^{-10}\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$指向太阳的固定加速度，使得飞船因此而减慢[20]，结果是偏离了设计轨道。迄今为止，导致这现象的原因依然不明朗，以至于成为当今最吸引人的天文物理谜团之一。

先锋号飞船的引力异常问题呈现了与暗物质现象相同的规律，我们根据惯性的相对性原理解释了这一怪异的问题[21]，所得结果与美国宇航局（NASA）喷气推进实验室的数据相符合。

这一结果从根本上排除了其他可能解释这一异常现象的假设，包括诸如推进剂泄漏、热反冲力效应以及暗物质作用等猜测。

以上的分析结果表明，对于太阳系这样的局部范围，有 $\Delta m_I \approx 0$ 及 $m_I \approx m_G$，故而有理由将 m_I 和 m_G 在等式(10)两边消去，这便导致等式(22)不再成立，行星绕日的旋转曲线也将呈现图1(b)中牛顿经典理论在局域范围的预期值（B）。

6 星系引力透镜的增强效应

6.1 星系的质量

既然星系的可观测质量 M_0 主要集中于 $r \leqslant r_0$ 的星系内部区域，那么，当 $r > r_0$时，随着距离的增加，质量 M_0 不再增加。这就使得我们得以不计距离增加与否，仅通过测量星系外缘任何一个天体的圆周速度 v_c来确定该星系的总质量，即

$$M_0 = \frac{r_0}{G} v_c^2, \tag{41}$$

结果可以不需要考虑任何暗物质的存在。一个典型的例子就是我们的银河系，若取$r_0 = r_\odot \approx 8.29 \pm 0.16 kpc \approx 2.6 \times 10^{17} km; v_c = v_\odot \approx 239 \pm 5 kms^{-1}$，代入(41)，就可以确定银河系的总质量 $M_0 \approx 2.2 \times 10^{41} kg \approx 1.1 \times 10^{11} M_\odot$，其中，$M_\odot \approx 2.0 \times 10^{30} kg$为太阳质量。

6.2 星系外缘天体的螺线轨道倾角和向心速度

由公式(24)和(41)，可导出星系外缘天体的对数螺线轨道倾角与星系质量的关系为

$$\varphi_0 = \tan^{-1}\sqrt{2\xi_0} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{2v_c}{c}} = \tan^{-1}[\frac{4GM_0}{r_0 c^2}]^{1/4}, \tag{42}$$

其中

$$\xi_0 = \frac{v_c}{c} = \sqrt{\frac{GM_0}{r_0 c^2}}; \tag{43}$$

因此，沿这些对数螺线轨道运行的天体有着共同的向心速度

$$v_n = v_c \times \tan\varphi_0, \tag{44}$$

这速度也是一个常数，与这些天体的轨道半径无关。

6.3 光线在引力场作用下的偏折

根据爱因斯坦等效原理，来自远方恒星的光线经过太阳附近时会由于太阳引力场的作用而弯折。这是一种由物体质量引起的光线偏折效应，虽然与普通光学透镜的物理原理完全不同，但也是某种真实意义上的透镜行为，因此被称为爱因斯坦引力透镜效应。由广义相对论理论给出的大质量天体引起的光线偏折角为

$$\delta\varphi = \frac{4GM}{rc^2}, \tag{45}$$

公式中，G 为牛顿万有引力常数；M 为天体的质量；r 为碰撞参数；c 是光速。显然，在爱因斯坦公式中，光线的偏转角度与物体的质量成正比；与碰撞参数成反比，即光线的入射路径离天体越近偏转角度越大。爱因斯坦透镜公式(45)的意义见图5(a)。

爱因斯坦根据公式(45)预言了太阳的引力场造成的星光偏折角度

$$\delta\varphi = \frac{4GM_{\odot}}{R_{\odot}c^2} \approx 1.75'', \tag{46}$$

其中，$r = R_{\odot} \approx 6.96 \times 10^5 km$ 为太阳半径；$M = M_{\odot} \approx 1.99 \times 10^{30} kg$ 为太阳质量。这一理论预言最初由爱丁顿团队于1919年5月通过天文观测所证实[22]。图5(b)为星光掠过太阳周边时的偏转角度相对于碰撞参数的关系。

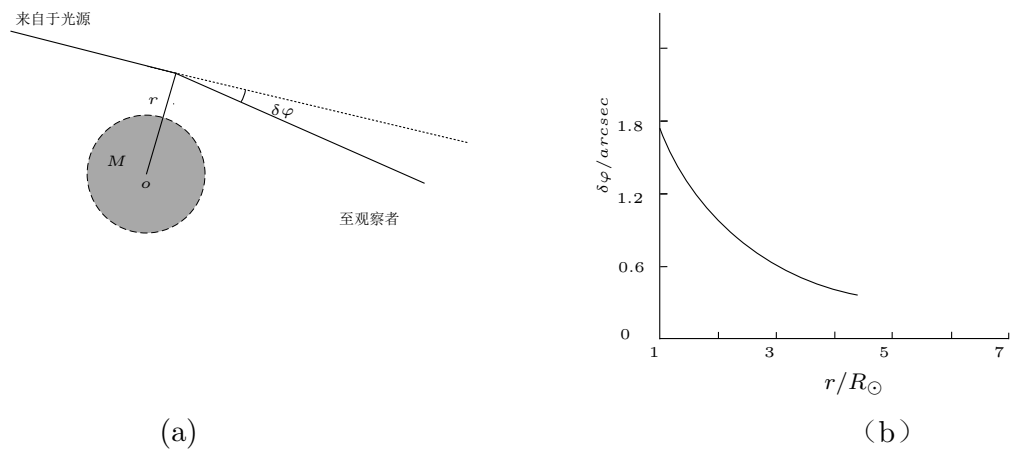


图 5: 爱因斯坦引力透镜: (a) 光线经过恒星引力场时的路径 (b) 爱因斯坦值

6.4 星系规模的引力透镜效应

如果引力场的作用包括了本文所涉及的相对论修正，这会对光线的偏折产生何种可观的影响？根据本文第3章的讨论结果，一个孤立星系外缘的全部天体都将运行在同样方程的对数螺线轨道上。取处于临界半径的轨道 I 和任意的另一根轨道 I'，见图4(a)，这些轨道都具有相同的常数倾角 φ_0，这使得所有在这些轨道上运行的天体都有着相同的向心速度 v_n，与轨道半径无关（另见本文6.2节）。

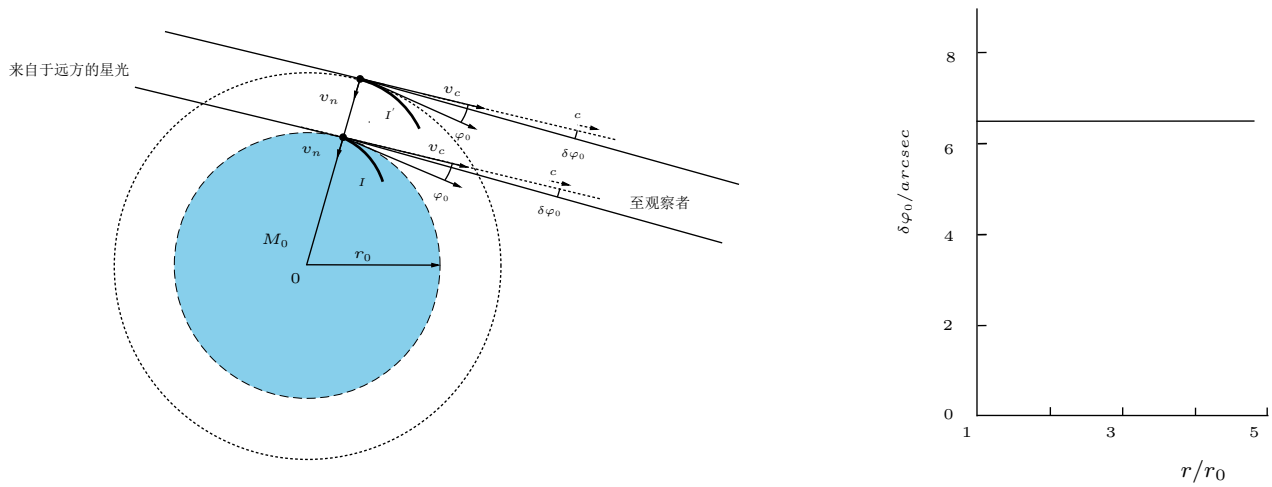
虽然根据本文第4章和第5章的结论，运行在不同轨道 I 和 I' 上的自由粒子或天体，其惯性质量与引力质量的比值并不相同（局域性等效原理的破坏），但是在轨道 I 或 I' 上的任何一个足够小的局部区域内，不仅伽利略等效原理必然成立，而且爱因斯坦等效原理也成立。因此，如图6(a)所示，当光子掠过星系引力场时，其行为与普通质点或天体的唯一不同就是以光速在

向前运动，即 $v_c = c$，而这些光子的向心加速度以至于向心速度 v_n 与普通质点或天体是相同的（参考爱因斯坦电梯模型）。于是，根据(42)和(44)，我们便可以推导出星系规模的引力效应导致的光线偏转角，即

$$\delta\varphi_0 \approx \tan\delta\varphi_0 = \frac{v_n}{c} = \frac{v_c}{c} \times \tan\varphi_0 = \sqrt{2}(\frac{GM_0}{r_0c^2})^{3/4}, \tag{47}$$

上式中，M_0 为星系临界半径 r_0 区域内所包围的可观测质量。星系规模的透镜公式(47)的意义见图6(a)。

星系引力透镜公式(47)所给出的光线偏转角度明显大于恒星透镜的爱因斯坦值(45)。此外，由于 r_0 和 M_0 对于一个星系而言都是定值，因而光线偏转角度 $\delta\varphi_0$ 相对于碰撞参数的关系是一条平坦的直线，并不随碰撞参数的增大而减小，其规律恰与所观察到的平坦星系自转曲线相一致，似乎在星系外缘存在着巨量的且分布均匀的暗物质晕。



(a) （b）

图 6: 孤立星系的引力透镜效应: (a) 基于相对论天体动力学效应的星系引力透镜模型 (b)银河系的光线偏折值相对于碰撞参数的关系

以银河系为例，带入参数 $r_0 \approx 8.29 \pm 0.16kpc \approx 2.6 \times 10^{17}km$; $M_0 \approx 1.1 \times 10^{11}M_\odot \approx 2.2 \times 10^{41}kg$，可得银河系的引力透镜效应造成的光线偏转角度为

$$\delta\varphi_0 \approx \tan\delta\varphi_0 = \sqrt{2}(\frac{GM_0}{r_0c^2})^{3/4} \approx 6.5'', \tag{48}$$

这个偏转角度 $\delta\varphi_0$ 相对于碰撞参数的关系见图6(b)。

7 结论

人们普遍认为，相对论理论只是应用于极强引力场或动体以接近光速运动条件下的理论，似乎在我们通常所见到的现象中，并无法直接感受到相对论效应。其实不然，相对性运动原理结合爱因斯坦等效原理应用于引力场中的动体，能够产生额外的引力，与星系所产生的牛顿引力结合作用于星系外缘天体上，这样的附加“加速”效应导致了平坦的星系自转曲线。整个论述不需要任何超出物理学基本原理的假定，导致的运动规律也和引力场的强弱及动体的速度大小无关，理论预言与天文观测结果的一致性，表明这是对宇宙暗物质现象的一个最简单的解释。

数学上，附加的引力使得牛顿运动微分方程的解有了本质上的改变：宇宙距离上的大尺度对数螺线替代了局部范围内的椭圆。但这一结论来自于自引力相互作用条件下纯净的两体系统，星系外缘以外的宇宙具有大尺度的均匀性，因而具备这样的条件。在太阳系这样的局部区域，来自银河系中心的巨大非均匀引力场，使得太阳与行星之间构不成这样理想的两体系统，行星绕日的动量矩就不是一个真正的守恒量，公式 (22) 不成立，轨迹也就不可能是对数螺线。

以上结果所根据的一个重要的物理观念是爱因斯坦等效原理，因此对我们的测试粒子而言，在一个局部惯性系中，必有 $m_G = m_I$，虽然这两种质量在概念上是截然不同的。现在似乎出现了新的问题：根据本文的理论，必将导致这样的一个推论，在大尺度的宇宙距离上，为了保证动量矩守恒，等效原理将被违反，也就是说，物体的惯性质量与引力质量的等值性关联被切断了。引力质量如同电荷，有其洛伦兹不变性[23]，而引力场中的惯性质量出现了跑动现象。虽然我们早就知道，惯性质量是观者相关的物理量，并非是洛伦兹不变量，本文的结果进一步表明，物体的惯性质量亦是引力场的函数，同引力势有关，因为引力势的能量也应该在惯性质量上有所表现。在我们的问题中，测试质点沿对数螺线轨道向内运动的过程必然伴随着引力能的释放，而这些释放了的引力能为测试质点增加了惯性：测试质点吸收的引力能一定增加了该质点的动能，**因为质点的速度没变，惯性质量的增加是解释其动能增加的唯一途径**。这当然符合马赫关于惯性的原理：**当有质量物体在其附近时，物体的惯性必然增大**。

虽然等效原理能否被违反，至今依然是一个有争议的问题，但在广义相对论中，这一原理仅在空间足够小的局部区域内才成立，如果所考察的空间大于这样的“伽利略区域”，将出现一种违背等效原理的“测地偏离”现象，这正是时空弯曲的结果，并不与广义相对论的原则相违背。物理上，引力场的非均匀性是等效原理被破坏的根源，潮汐现象就是一种典型的表现。因此在星系尺度上，除非处于均匀引力场中，否则大尺度潮汐引力的作用结果，将使等效原理不再成立。

本文推导出星系引力透镜效应的新公式。该公式表明，在星系可见质量的外缘，光线在星系引力场中的偏折角度是一个常数，与碰撞参数无关，其规律恰好与平直的星系速度旋转曲线相符合，这就造成一种假象，似乎有某种分布均匀但看不见的暗物质晕环绕在星系外围。

此外，本文所涉及的相对论天体动力学及宇宙暗物质问题并非是孤立的理论和问题，后续的推论还能够导致一些更有趣的结果[24–26]。特别地，本文仅讨论了引力光行差的一级增力效应，其二级增力效应将导致观测到的宇宙学红移，这和宇宙膨胀和暗能量的假设没有关系，详细内容可参见文献[25]。

参考文献（References）

[1] H. C. 瓦安尼，R. 鲁菲尼，[引力与时空]，向守平，冯珑珑译，北京：科学出版社，1992.

[2] V. C. Rubin, W. Ford, Jr. Kent, Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions, Astrophysical Journal, vol. 159, p.379, 1970.

[3] V. C. Rubin, W. Ford, Jr. Kent and Jr. Thonnard, Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 /R = 4kpc/ to UGC 2885 /R = 122 kpc/, Astrophysical Journal, Part 1, vol. 238, June 1,471-487, 1980.

[4] E. Komatsu, K. M. Smith, J. Dunkley, et al., Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation arXiv:[astro-ph.CO]/1001.4538, 2010. http://arxiv.org/abs/1001.4538

[5] M. Tegmark, D. Eisenstein, M. Strauss, et al., Cosmological Constraints from the SDSS Luminous Red Galaxies, arXiv:[astro-ph]/0608632, 2006. http://arxiv.org/abs/astro-ph/0608632

[6] D. S. Akerib, H. M. Araujo, X. Bai, et al., First results from the LUX dark matter experiment at the Sanford Underground Research Facility, arXiv:[astro-ph.CO]/1310.8214, 2013. http://arxiv.org/abs/1310.8214

[7] M. Clara, Dark-matter search considers exotic possibilities, nature, 14459.2014.

[8] M. Milgrom, A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis, Astrophysical Journal, 365-370, 1983.

[9] M. Milgrom, MOND as Modified Inertia, arXiv:[astro-ph]/0510117, 2005. http://arxiv.org/abs/astro-ph/0510117

[10] M. Milgrom, General virial theorem for modified-gravity MOND, arXiv:[gr-qc]/1311.2579, 2013. http://arxiv.org/abs/1311.2579

[11] F. Lüghausen, B. Famaey, P. Kroupa, A census of the expected properties of classical Milky Way dwarfs in Milgromian dynamics, arXiv:[astro-ph.GA]/1404.4049, 2014. http://arxiv.org/abs/1404.4049

[12] J. W. Moffat, V. T. Toth, Rotational Velocity Curves in the Milky Way as a Test of Modified Gravity, arXiv:[astro-ph.GA]/1411.6701, 2013. http://arxiv.org/abs/1411.6701

[13] P. D. Engelke, MOND Fit of Nature Physics 11:245 Mass Distribution Model to Rotation Curve Data, arXiv:[astro-ph.GA]/1505.06174, 2015. http://arxiv.org/abs/1505.06174

[14] F. Iocco, M. Pato and G. Bertone, Testing modified Newtonian dynamics in the Milky Way, arXiv:[astro-ph.GA]/1505.05181, 2015. http://arxiv.org/abs/1505.05181

[15] G. W. Angus, G. Gentile, R. A. Swaters, et al., Mass models of disk galaxies from the DiskMass Survey in MOND, arXiv:[astro-ph.GA]/1505.05522, 2015. http://arxiv.org/abs/1505.05522

[16] S. McGaugh, F. Lelli, J. Schombert, The radial acceleration relation in rotationally supported galaxies, arXiv:[astro-ph.GA]/1609.05917, 2016. https://arxiv.org/abs/1609.05917

[17] F. Nesti, P. Salucci, The Dark Matter Halo of the Milky Way, AD 2013, arXiv:[astro-ph]/1304.5127, 2013. http://arxiv.org/abs/1304.5127

[18] W. Dehnen, J. Binney, Local stellar kinematics from Hipparcos data, arXiv:[astro-ph]/9710077, 1997. http://arxiv.org/abs/astro-ph/9710077

[19] Y. Xu, J. J. Li, M. J. Reid, et al., ON the Nature of the Local Spiral Arm of the Milky Way, arXiv:[astro-ph.GA]/1304.0526, 2013. http://arxiv.org/abs/1304.0526

[20] J. D. Anderson, P. A. Laing, E. L. Lau, et al., Study of the anomalous acceleration of Pioneer 10 and 11, arXiv:[gr-qc]/0104064, 2002. http://arxiv.org/abs/gr-qc/0104064

[21] 李志平，李然，论先锋号飞船引力异常、米尔格罗姆定律和引力场中惯性的相对性原理[EB/OL].北京：中国科技论文在线[2015-08-17].http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/201508-83.

[22] F. W. Dyson, A. S. Eddington, C. Davidson, A determination of the deflection of light by the Sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of 29 May 1919. Philosophical Transactions of the Royal Society. 220A: 291–333, 1920.

[23] L. Zhiping, L. Xin, Quantum resonance scheme to determine the gravitational constant G, arXiv:[gen-ph]/1111.6941, 2011, http://arxiv.org/abs/1111.6941.

[24] 李志平，李然，暗能量问题解析：引力场中的惯性红移导致的宇宙加速膨胀现象[EB/OL].北京：中国科技论文在线[2015-07-14]. http://www.paper.edu.cn/html/releasepaper/2015/07/132/

[25] 李志平，李然，万有引力的潮汐效应所导致的宇宙学红移及宇宙加速膨胀表象[EB/OL].北京：中国科技论文在线[2017-02-27]. http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/201702-178

[26] 李志平，李然. 高红移Ia型超新星天文距离的交叉确证[EB/OL].北京：中国科技论文在线[2014-09-18].http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/201409-208